HRAVÁ MATEMATIKA 9

úloha s vyššou náročnosťou

úloha nad rámec ŠVP

úloha na podporu digitálnej kompetencie

Pracovný zošit pre 9. ročník ZŠ

2. vydanie, 2023

AUTORI: PaedDr. Anna Dzurusová, Mgr. Martina Compľová, Mgr. Jaroslava Hlásniková, Mgr. Vladimír Krajňák, Mgr. Andrea Lakyová, PaedDr. Katarína Poláčiková, Mgr. Eduard Skonc

ODBORNÁ KOREKTÚRA: Mgr. Éva Csala, PaedDr. Eva Virostková, Mgr. Helena Gregušová

RECENZENTI: PaedDr. Jozef Kuzma, PhD., RNDr. Viera Ringlerová, PhD., RNDr. Monika Szelesová

VYDAVATEĽ: TAKTIK vydavateľstvo, s. r. o.

RIADITEĽ: Ing. Miroslav Tokarčík

ŠÉFREDAKTORKA: Ing. Alena Fusková

ZODPOVEDNÁ REDAKTORKA: Mgr. Eva Trojčáková

GRAFICKÁ ÚPRAVA: Ing. Peter Rácz

ISBN 978-80-8180-325-3

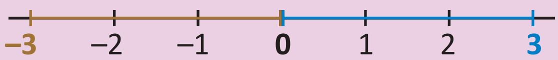
www.taktik.sk

I. OPAKOVANIE UČIVA Z 8. ROČNÍKA

Množinu celých čísel tvoria prirodzené čísla, čísla k nim opačné a číslo 0.
Množina celých čísel sa označuje Z. Z = {.... −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ....}

Absolútna hodnota celého čísla

- vzdialenosť obrazu čísla na číselnej osi od obrazu čísla 0
- je vždy kladné číslo alebo 0
- dve navzájom opačné čísla majú rovnaké absolútne hodnoty
- absolútna hodnota čísla 3: $|3| = 3$
- absolútna hodnota čísla −3: $|-3| = 3$



vzdialenosť obrazu čísla −3 od obrazu čísla 0

$|-3| = 3$

vzdialenosť obrazu čísla 3 od obrazu čísla 0

$|3| = 3$

Výraz

- zápis obsahujúci ľubovoľné reálne čísla, premenné vyjadrené písmenami a znaky operácií sčítania, odčítania, násobenia a delenia
- výrazy delíme na číselné výrazy a výrazy s premennou

$12 + 7 \cdot (2 - 9)$ číselný výraz

$2x - 4y + 10$ výraz s premennou

Súčin a podiel viacerých čísel

- súčin a podiel ľubovoľného počtu kladných čísel je vždy kladné číslo
  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
  $120 : 2 : 3 : 4 = 5$
- súčin a podiel párneho počtu záporných čísel je vždy kladné číslo
  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = 120$
  $(-120) : (-2) : (-3) : (-4) = 5$
- súčin a podiel nepárneho počtu záporných čísel je vždy záporné číslo
  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$
  $(-24) : (-2) : (-3) = -4$

Rovnica

- zápis rovnosti dvoch výrazov, v ktorom treba určiť hodnotu premennej tak, aby sme po dosadení vypočítanej hodnoty za premennú dostali rovnosť

$$\underbrace{x + 5}_{\text{výraz}} = \underbrace{10}_{\text{výraz}}$$

Pravdepodobnosť je hodnota vyčísľujúca istotu alebo neistotu výskytu určitej udalosti (určitého javu).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

P (A): pravdepodobnosť udalosti A
m: počet výsledkov, keď jav A nastane
n: počet všetkých výsledkov

Ekvivalentná úprava rovnice

- úprava rovnice, ktorá mení len tvar rovnice a nemení množinu koreňov rovnice

Najbežnejšie ekvivalentné úpravy rovníc

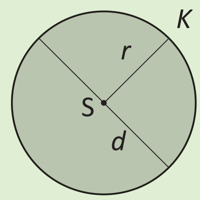
- k obidvom stranám rovnice pripočítame alebo od nich odpočítame ľubovoľné číslo alebo výraz definovaný v obore riešenia rovnice
- obidve strany rovnice vynásobíme alebo vydelíme ľubovoľným číslom rôznym od nuly

Postup riešenia konštrukčnej úlohy:

1. náčrt: načrtneme geometrický útvar a vyznačíme známe údaje zo zadania,
2. rozbor: dané a hľadané prvky, postup, ako ich nájdeme,
3. postup konštrukcie – postup v bodoch, podľa ktorých útvar narysujeme,
4. konštrukcia: zostrojenie geometrického útvaru,
5. skúška správnosti a odpoveď: kontrola zadaných údajov a počet riešení.

Kruh

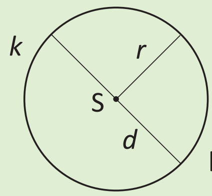
- množina bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od stredu S je menšia alebo rovnaká ako polomer kružnice
- vnútorná plocha ohraničená kružnicou vrátane nej samej



K (S; r)

Kružnica

- množina bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť r > 0 od daného pevného bodu (stred S)



k (S; r)

Hranol

- teleso, ktoré má dve zhodné a rovnobežné podstavy a niekoľko bočných stien
- výška hranola v: vzdialenosť podstáv hranola

Kolmý hranol

- má dve zhodné podstavy tvaru n-uholníka (mnohouholníka), ktoré sú vzájomne rovnobežné
- má n bočných stien, ktoré majú tvar obdĺžnika alebo štvorca a sú kolmé na podstavu
- všetky bočné steny tvoria plášť
- bočné steny spolu s podstavami tvoria sieť hranola

Pravidelný hranol

- kolmý hranol, ktorého podstava je pravidelný útvar (rovnostranný trojuholník, štvorec alebo iný pravidelný mnohouholník)

Obvod a obsah rovinných útvarov

ROVINNÝ ÚTVAR	OBVOD	OBSAH
Štvorec	$o = 4 \cdot a$	$S = a \cdot a$
Obdĺžnik	$o = 2 \cdot (a + b)$	$S = a \cdot b$
Kruh	$o = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$	$S = \pi \cdot r \cdot r$
Kosoštvorec	$o = 4 \cdot a$	$S = a \cdot v_a$
Kosodĺžnik	$o = 2 \cdot (a + b)$	$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$
Trojuholník	$o = a + b + c$	$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$
Lichobežník	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$

1 ***Doplň sčítací trojuholník.***

−9 −7 15 −4
−16 *8* *11*
−8 *19*
11

2 −3 −7 12
−1 *−10* *5*
−11 *−5*
−16

2 ***Doplň súčinový trojuholník.***

1 440
−18 *−80*
−9 2 −40

−120 000
600 *−200*
−30 −20 10

3 ***Vypočítaj.***

$\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)= \frac{1}{3}-\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{1}{6}$

$\left(\frac{2}{3}:\frac{4}{9}\right):\frac{7}{6} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{6}{7}=\frac{9}{7}$

$(-3)\cdot 7\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-4) = (-21)\cdot(-8)=168$

$\frac{-\frac{2}{8}}{-\frac{5}{6}} = \left(-\frac{2}{8}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{3}{10}$

4 ***Vypočítaj.***

a) $3:\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}:2\right)+5 =$

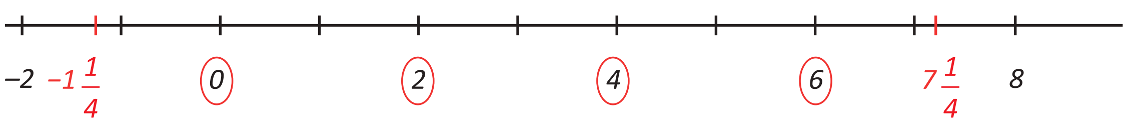
$3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)+5=-5-\left(-\frac{2}{5}\right)+5=\frac{2}{5}$

b) $\left[0{,}4-\frac{2}{5}:(-2)\right]+(-2):(-1) =$

$\left[\frac{4}{10}-\frac{2}{5}\cdot-\left(\frac{1}{2}\right)\right]+2=\frac{4}{10}+\frac{1}{5}+2=\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{20}{10}=\frac{26}{10}=2\frac{3}{5}$

5 ***Ktoré párne celé čísla sú väčšie ako $-1\frac{1}{4}$ a menšie ako $7\frac{1}{4}$? Vyznač ich na číselnej osi.***

$-1\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;\ 7\frac{1}{4}=\frac{29}{4}=7{,}25$



6 ***Urči, ktoré celé číslo je:***

a) o 1 väčšie ako −15   *-15 + 1 = – 14*

b) o 3 menšie ako (4 – 17) – 8   *(4 – 17) – 8 – 3 = – 13 – 8 – 3 = – 24*

c) 5-krát väčšie ako 108   *5 · 108 = 540*

d) 6-krát menšie ako 774   *774 : 6 = 129*

7 ***Vypočítaj hodnotu výrazu*** $\frac{20+4x}{5x}$ ***pre dané*** *x:*

a) x = −2 $\frac{20+4.-2}{5.(-2)} = \frac{20-8}{-10} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}$

b) x = −1 $\frac{20+4\cdot(-1)}{5\cdot(-1)} = \frac{20-4}{-5} = -\frac{16}{5}$

c) x = 2 $\frac{20+4\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{20+8}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$

d) x = 4 $\frac{20+4\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{20+16}{20} = \frac{36}{20} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

8 ***Zjednoduš výrazy.***

17x – 15y + 4 – 22x + 16y – 9 = *−5x + y – 5*

12x – 8 · (2x + 3y) + 36y = *12x – 16x – 24y + 36y = −4x + 12y*

9x – 7y + [2 · (12x – 3y)] – 33x + 13y + 5 = *9x – 7y + 24x – 6y – 33x + 13y + 5 = 33x – 33x – 13y + 13y + 5 = 5*

9 ***Uprav a zjednoduš výrazy.***

(3,2x + 4) : 4 = *0,8x + 1*

(60x – 30y) : (−15) = *−4x + 2y*

(7,7x + 14y + 0,7) : (−0,7) = *−11x – 20y – 1*

10 ***Uprav výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku podľa vzoru.***

55m + 20n = 5 · (11m + 4n)

81a – 27b + 9 = *9 · (9a – 3b + 1)*   64 – 28c = *4 · (16 – 7c)*

18d + 36e = *18 · (d + 2e)*   −50f – 25g = *−25 · (2f + g)*

11 ***Rieš rovnice a urob skúšku správnosti.***

a) 4x – 12 = 36

4x = 36 + 12
4x = 48
x = 48 : 4
x = 12

4 · 12 – 12 = 36
48 – 12 = 36
36 = 36

b) 8x – 9 = 13x + 16

8x – 13x = 16 + 9
– 5x = 25
x = – 5

8 · (-5) – 9 = 13 · (-5) + 16
– 40 – 9 = – 65 + 16
– 49 = – 49

c) 5 · (x + 2) = 50

5x + 10 = 50
5x = 50 – 10
5x = 40
x = 8

5 · (8 + 2) = 50
5 · 10 = 50
50 = 50

12 ***Zo vzťahu na výpočet obvodu kosoštvorca vyjadri vzťah na výpočet strany a.***

o = 4 · a => a = o : 4

13 ***Karol je o 5 rokov starší ako Ján. Spolu majú 29 rokov. Koľko rokov má Karol a koľko rokov má Ján?***

Zápis: Ján....................................x rokov
Karol.................................. x + 5 rokov
Spolu .... 29 rokov

Postup riešenia:
rovnica: x + x + 5 = 29
Výpočet: 2x + 5 = 29
2x = 24
x = 12
Ján ....x = 12 rokov
Karol .... x + 5 = 12 + 5 = 17 rokov

Skúška správnosti: 12 + 17 = 29

Karol má *17* rokov a Ján má *12* rokov.

14 ***Traja kamaráti zbierajú známky. Peter má dvakrát viac známok ako Jozef a Michal má o štyri známky menej ako Jozef. Koľko známok má Peter, koľko Jozef a koľko Michal, ak všetci traja spolu majú 148 známok?***

Zápis: Jozef..... x známok
Peter....... 2-krát viac známok ako Jozef: 2x
Michal .... o štyri známky menej ako Jozef: x – 4
Spolu........148 známok

Postup riešenia:
rovnica: x + 2x + x – 4 = 148
Výpočet: 4x – 4 = 148 / + 4
4x = 148 + 4
4x = 152 / : 4
x = 38

Jozef.................. x = 38
Peter................2x = 2 · 38 = 76
Michal.................x – 4 = 38 – 4 = 34

Skúška správnosti: 38 + 76 + 34 = 148

Peter má *76* známok, Jozef má *38* a Michal *34* známok.

15 ***Rieš rovnice a urob skúšku správnosti.***

a) $2 \cdot (3x - 4) - 1 = 11x$

$6x - 8 - 1 = 11x$
$6x - 9 = 11x$
$-9 = 11x - 6x$
$-9 = 5x$
$x = -9 : 5$
$x = -1{,}8$

$2 \cdot [3 \cdot (-1{,}8) - 4] - 1 = 11 \cdot (-1{,}8)$
$2 \cdot (-5{,}4 - 4) - 1 = -19{,}8$
$2 \cdot (-9{,}4) - 1 = -19{,}8$
$-18{,}8 - 1 = -19{,}8$
$-19{,}8 = -19{,}8$

b) $9x - 3 \cdot (x + 8) + 1 = 43$

$9x - 3x - 24 + 1 = 43$
$6x - 23 = 43$
$6x = 43 + 23$
$6x = 66$
$x = 11$

$9 \cdot 11 - 3 \cdot (11 + 8) + 1 = 43$
$99 - 33 - 24 + 1 = 43$
$66 - 23 = 43$
$43 = 43$

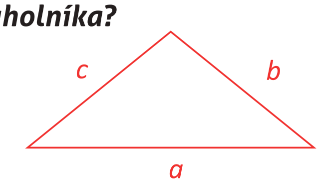
16 ***Vypočítaj veľkosti vonkajších uhlov trojuholníka ABC, keď poznáš veľkosti jeho dvoch vnútorných uhlov.***

a) $\alpha = 54°32'$; $\beta = 79°$ $\gamma = 180° - 54°\,32' - 79° = 46°\,28'$

$\alpha' = 180° - 54°\,32' = 125°\,28'$; $\beta' = 180° - 79° = 101°$; $\gamma' = 180° - 46°\,28' = 133°\,32'$

b) $\beta = 103°40'$; $\gamma = 40°25'$ $\alpha = 180° - 103°\,40' - 40°\,25' = 35°\,55'$
$\alpha' = 180° - 35°\,55' = 144°\,5'$; $\beta' = 180° - 103°\,40' = 76°\,20'$; $\gamma' = 180° - 40°\,25' = 139°\,35'$

17 ***Obvod rovnoramenného trojuholníka je 32,5 dm. Dĺžka základne je 153 cm. Aká je dĺžka ramena tohto trojuholníka?***



$o = 32{,}5\ dm = 325\ cm$
$a = 153\ cm$
$b = c = ?$

$o = a + b + b$
$o = a + 2b$
$2b = o - a$
$b = (o - a) : 2$
$b = (325\ cm - 153\ cm) : 2$
$b = 172\ cm : 2$
$b = 86\ cm$

Dĺžka ramena tohto trojuholníka je $\boxed{86}$ cm.

18 ***Zapíš vzorec pre výpočet obvodu obdĺžnika.***

$o = 2 \cdot (a + b)$
$o = 2a + 2b$

a) Vyjadri zo vzorca vzťah pre výpočet strany a.

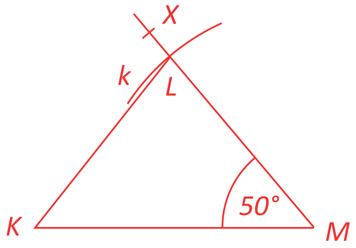
$a = (o - 2b) : 2$

b) Vypočítaj dĺžku strany a, ak obvod obdĺžnika o = 24 cm a druhá strana obdĺžnika b = 4 cm.

$a = (24\ cm - 2 \cdot 4\ cm) : 2$
$a = (24\ cm - 8\ cm) : 2$
$a = 16\ cm : 2$
$a = 8\ cm$

19 *Zostroj Δ KLM, ak je dané: |KM| = 5 cm; |LM| = 4 cm; |∢KML| = 50°.*

Náčrt:



Rozbor:

Dané body: K, M

Hľadaný bod: L; L ∈ $\overrightarrow{MX}$ ∩ k

|∢KMX| = 50°

k; k (M; r = 4 cm)

Postup konštrukcie:

1. l; l = |KM| = 5 cm

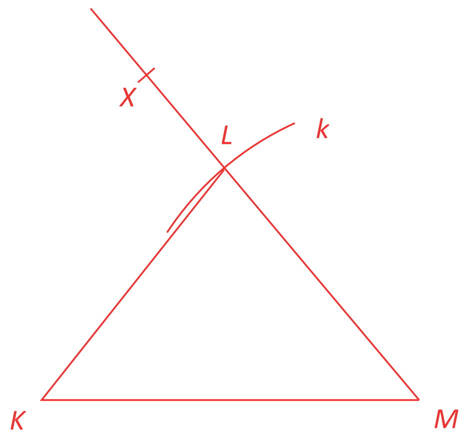
2. ∢KMX; |∢KMX| = 50°

3. k; k (M; r = 4 cm)

4. L; L ∈ $\overrightarrow{MX}$ ∩ k

5. Δ KLM

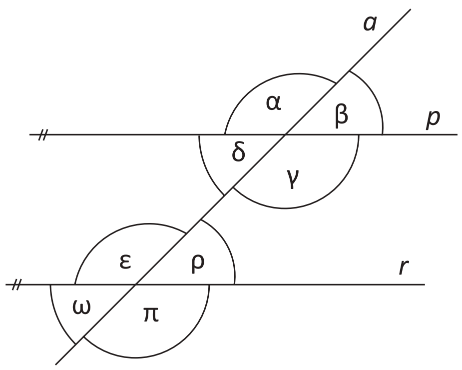
Konštrukcia:



Skúška správnosti: meraním kontrolovať dané rozmery |KM| = 5 cm; |LM| = 4 cm; |∢KML| = 50°

Odpoveď: Úloha má v polrovine jedno riešenie.

20 *Vypíš všetky dvojice súhlasných uhlov a striedavých uhlov. Urči veľkosti uhlov ε a ω, ak β = 45°.*



Súhlasné uhly: α a ε; β a ρ; γ a π; δ a ω

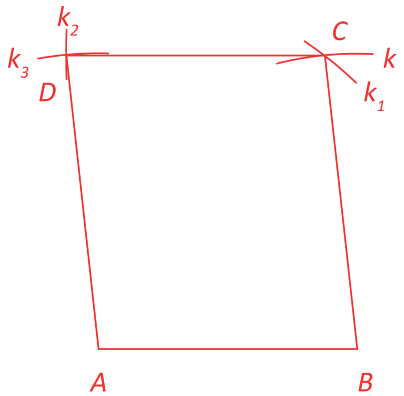
Striedavé uhly: α a π; β a ω; γ a ε; δ a ρ

ak β = 45° => δ = 45° => ω = 45°

ε = 180° – 45° = 135°

21 *Zostroj kosodĺžnik ABCD s rozmermi a = 7 cm, b = 8 cm a uhlopriečkou |AC| = 10 cm.*

Náčrt:



Rozbor:

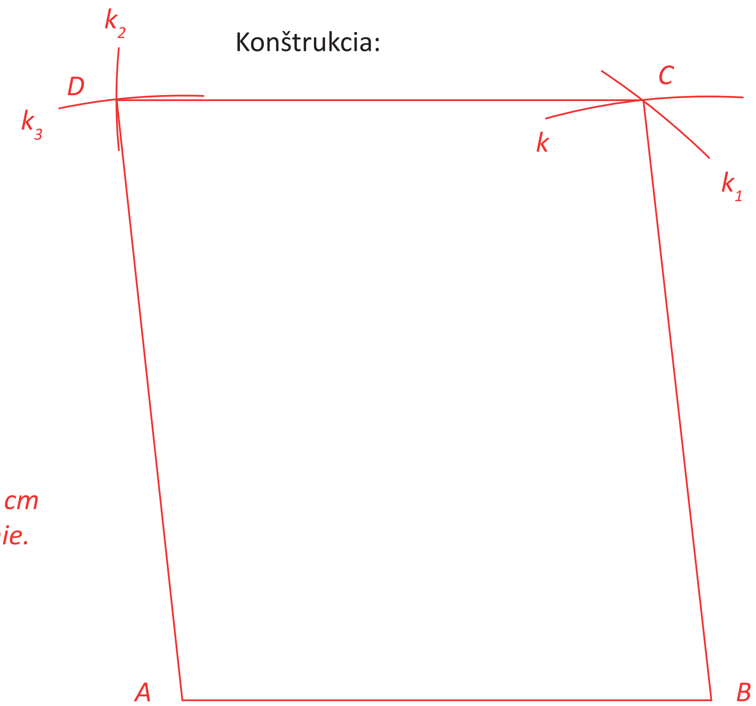
Dané body: A, B
Hľadané body: C, D
C; C ∈ k ∩ k_1
k; k (B; 8 cm)
k_1; k_1 (A; 10 cm)
D; D ∈ k_2 ∩ k_3
k_2; k_2 (C; 7 cm)
k_3; k_3 (A; 8 cm)

Postup konštrukcie:

1. AB; |AB| = 7 cm
2. k; k (B; 8 cm)
3. k_1; k_1 (A; 10 cm)
4. C; C ∈ k ∩ k_1
5. k_2; k_2 (C; 7 cm)
6. k_3; k_3 (A; 8 cm)
7. D; D ∈ k_2 ∩ k_3
8. kosodĺžnik ABCD

Skúška správnosti: meraním kontrolovať
dané rozmery a = 7 cm; b = 8 cm; |AC| = 10 cm
Odpoveď: Úloha má v polrovine jedno riešenie.

Konštrukcia:



22 *Vypočítaj chýbajúce údaje o rovnobežníku ABCD, ak a je dĺžka strany, v_a je výška na stranu a, S je obsah daného rovnobežníka.*

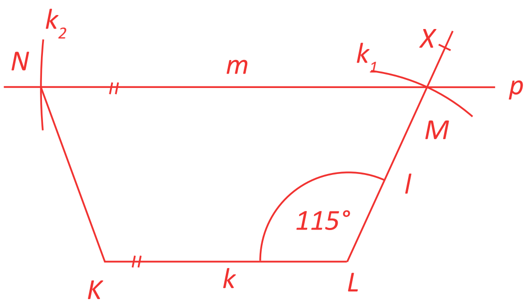
a	6 cm	12 dm	*30 mm*	8 cm
v_a	8 cm	*12 dm*	20 mm	4 cm
S	*48 cm²*	144 dm²	600 mm²	*32 cm²*

$S = a \cdot v_a$
$a = S : v_a$
$v_a = S : a$

a) S = 6 cm · 8 cm = 48 cm²
b) v_a = 144 dm² : 12 dm = 12 dm
c) a = 600 mm² : 20 mm = 30 mm
d) S = 8 cm · 4 cm = 32 cm²

23 ***Zostroj lichobežník KLMN, ktorého základne merajú k = 5 cm, m = 8 cm, rameno l = 4 cm a |∢KLM| = 115°.***

Náčrt:



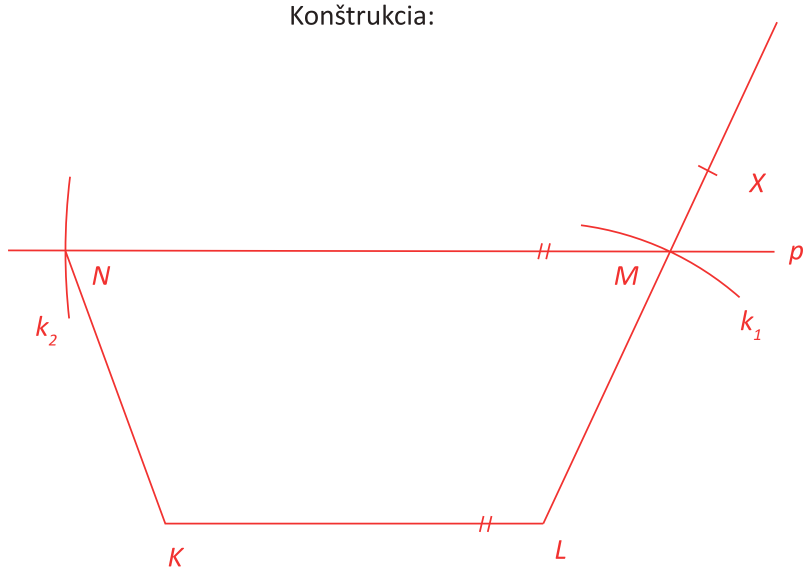
Rozbor:

Dané body: K, L
Hľadané body: M, N
M; M ∊ $\overrightarrow{LX}$ ∩ k_1
∢KLX; |∢KLX| = 115°
k_1; k_1 (L; 4 cm)
N; N ∊ p ∩ k_2
p; p II KL; M ∊ p
k_2; k_2 (M; 8 cm)

Postup konštrukcie:

1. KL; |KL| = 5 cm
2. ∢KLX; |∢KLX| = 115°
3. k_1; k_1 (L; 4 cm)
4. M; M ∊ $\overrightarrow{LX}$ ∩ k_1
5. p; p II KL; M ∊ p
6. k_2; k_2 (M; 8 cm)
7. N; N ∊ p ∩ k_2
8. lichobežník KLMN

Konštrukcia:



Skúška správnosti: meraním kontrolovať dané rozmery k = 5 cm, m = 8 cm, l = 4 cm; |∢KLM| = 115°
Odpoveď: Úloha má v polrovine jedno riešenie.

24 ***Na vysadenie 1 ha zemiakov potrebujeme 230 kg sadby. Koľko kg zemiakov potrebujeme na vysadenie poľa v tvare lichobežníka so základňami 534 m a 428 m a výškou 132 m?***

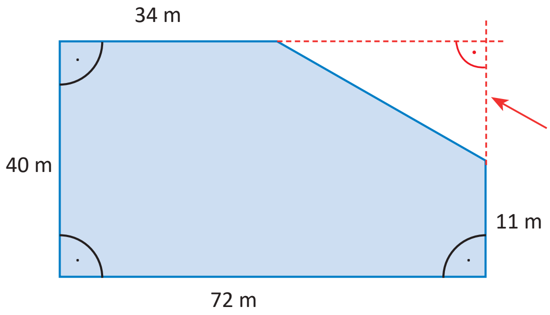
$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$

S = [(534 m + 428 m) · 132 m] : 2 = (962 m · 132 m) : 2 =
= 126 984 m² : 2 = 63 492 m²

1 ha .... 230 kg
6,3492 ha ... x kg
$x = 6{,}3492 \text{ ha} \cdot 230 \frac{\text{kg}}{\text{ha}}$
x = 1 460,316 kg

Hmotnosť sadby potrebná na vysadenie poľa v tvare lichobežníka bude *1 460,3* kg.

25 ***Na každých 25 m² treba 1 kg trávového semena. Koľko kg trávového semena je potrebných na zatrávnenie parku znázorneného na obrázku, keď chodník zaberá 150 m²?***



obdĺžnik: $S_1 = 72\text{ m} \cdot 40\text{ m}$

$S_1 = 2\,880\text{ m}^2$

pravouhlý trojuholník: $S_2 = 38\text{ m} \cdot 29\text{ m} : 2$

$S_2 = 551\text{ m}^2$

chodník: $S_3 = 150\text{ m}^2$

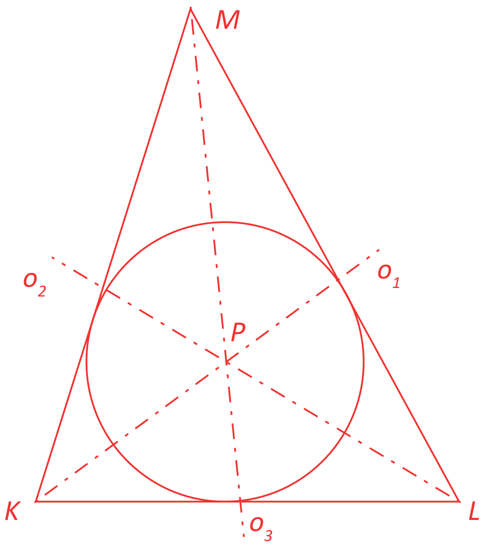
$S = S_1 - S_2 - S_3 = 2\,880\text{ m}^2 - 551\text{ m}^2 - 150\text{ m}^2 = 2\,179\text{ m}^2$

$2\,179\text{ m}^2 : 25\,\frac{\text{m}^2}{\text{kg}} = 87{,}16\text{ kg}$

Na zatrávnenie parku je potrebných $\boxed{87{,}16}$ kg trávového semena.

26 ***Narysuj trojuholník KLM, ak |KL| = 56 mm; |LM| = 74 mm; |KM| = 68 mm. Zostroj priesečník P osí všetkých vnútorných uhlov trojuholníka a kružnicu k (P; r = |P; KL|).***

k je kružnica vpísaná do trojuholníka KLM



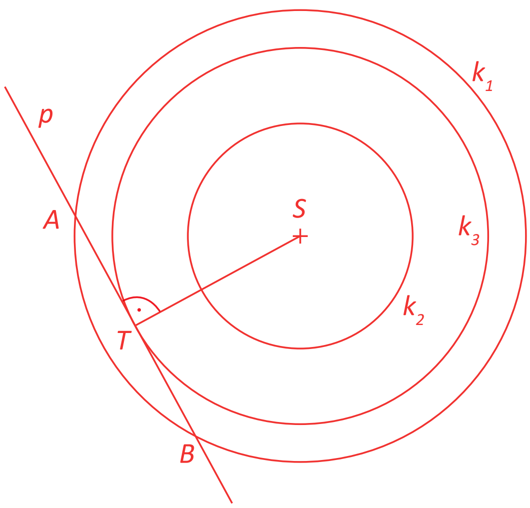
27 ***Narysuj priamku p a bod S tak, aby jeho vzdialenosť od priamky p bola 5 cm. Zostroj kružnice k_1 (S; 6 cm), k_2 (S; 3 cm), k_3 (S; 5 cm). Ku každej kružnici zapíš pomenovanie vzájomnej polohy priamky a kružnice, označ priesečníky priamky a kružnice.***

a) p je sečnica kružnice k_1
A, B – priesečníky priamky p a kružnice k_1

b) p je nesečnica kružnice k_2

c) p je dotyčnica ku kružnici k_3
T – je priesečník (bod dotyku)

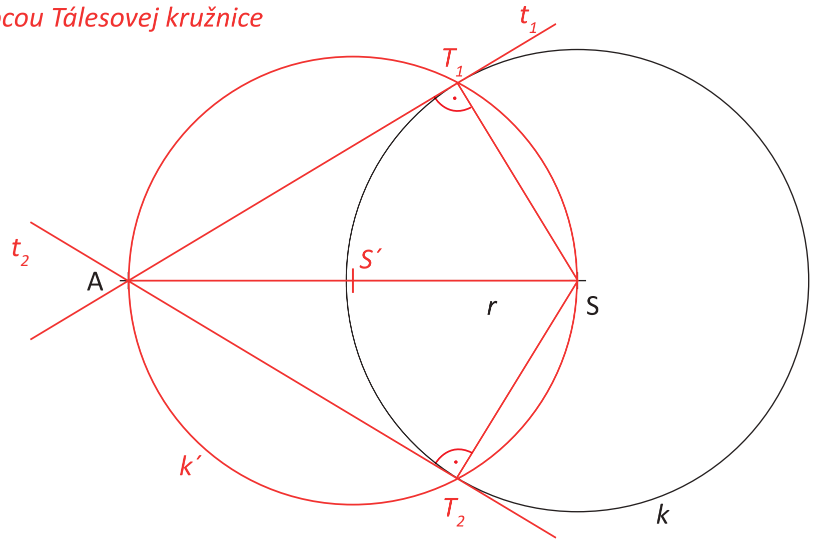
(obrázok je v mierke 1 : 2)



28 ***Je daná kružnica k (S; r) a bod A, ktorý leží mimo nej. Zostroj dotyčnice ku kružnici k, ktoré prechádzajú bodom A.***

konštrukcia pomocou Tálesovej kružnice

k´; k´(S´; |AS| : 2)



$k \cap k´ = T_1, T_2$; sú to body dotyku
dotyčnice t_1 a t_2 ku kružnici k, prechádzajúce bodom A sú priamky t_1 ($\overleftrightarrow{AT_1}$), t_2 ($\overleftrightarrow{AT_2}$); úloha má dve riešenia

29 ***Vypočítaj chýbajúce údaje o kruhu K.***

$d = 2 \cdot r$; $r = d : 2$; $o = 2 \cdot \pi \cdot r$ alebo $o = \pi \cdot d$; $d = o : \pi$; $S = \pi \cdot r \cdot r$; $r \cdot r. = S : \pi$

r	2 cm	*30 mm*	*1 dm*	*10 m*
d	*4 cm*	60 mm	*2 dm*	*20 m*
o	*12,56 cm*	*18,84 cm*	6,28 dm	*62,8 m*
S	*12,56 cm²*	*28,26 cm²*	*3,14 dm²*	314 m²

1) $d = 2 \cdot 2$ cm = 4 cm; $o = 3{,}14 \cdot 4$ cm = 12,56 cm $S = 3{,}14 \cdot 2$ cm $\cdot$ 2 cm = 12,56 cm²
2) r = 60 mm : 2 = 30 mm; $o = 3{,}14 \cdot 60$ mm = 188,4 mm = 18,84 cm
$S = 3{,}14 \cdot 30$ mm $\cdot$ 30 mm = 2826 mm² = 28,26 cm²
3) d = 6,28 dm : 3,14 = 2 dm; r = 2 dm : 2 = 1 dm; $S = 3{,}14 \cdot 1$ dm $\cdot$ 1 dm = 3,14 dm²
4) $r \cdot r$ = 314 m² : 3,14 = 100 m² => r = 10 m; d = 10 m $\cdot$ 2 = 20 m; o = 20 m $\cdot$ 3,14 = 62,8 m

30 ***Vypočítaj obvod kosoštvorca, ktorého obsah je 31 cm² a výška má dĺžku 6,2 cm.***

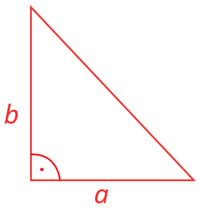
S = 31 cm² *v_a = 6,2 cm*

A) 25 cm *B) 20 cm* C) 25 dm D) 20 dm

$S = a \cdot v_a$ *$o = 4 \cdot a$*
$a = S : v_a$ *$o = 4 \cdot 5$ cm*
a = 31 cm² : 6,2 cm *o = 20 cm*
a = 5 cm

31 ***Vypočítaj objem kolmého hranola, ak veľkosť jeho výšky v = 60,8 cm a podstava je pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 40,4 cm a 43 cm.***

podstava



$a = 40{,}4\ \text{cm}$
$b = 43\ \text{cm}$
$S_p = 40{,}4\ \text{cm} \cdot 43\ \text{cm} : 2$
$S_p = 868{,}6\ \text{cm}^2$

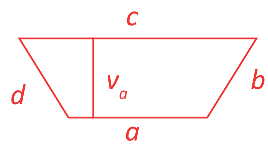
$V = S_p \cdot v$
$V = 868{,}6\ \text{cm}^2 \cdot 60{,}8\ \text{cm}$
$V = 52\,810{,}88\ \text{cm}^3 = 52{,}81088\ \text{dm}^3 \doteq 52{,}8\ \text{dm}^3$

Objem kolmého hranola je $\boxed{\doteq 52{,}8}$ dm³.

32 ***Bazén tvaru hranola je hlboký 2 m s dnom tvaru rovnoramenného lichobežníka s rozmermi základní 10 m a 18 m, ramenami s dĺžkou 7 m a výškou 5,7 m. Pri jarnom upratovaní treba vybieliť $\underbrace{\text{dno a steny}}_{S^*}$ bazéna. Koľko m² treba vybieliť?***

$a = 10\ \text{m};\ c = 18\ \text{m};\ b = d = 7\ \text{m};\ v_a = 5{,}7\ \text{m};\ v = 2\ \text{m}$

podstava



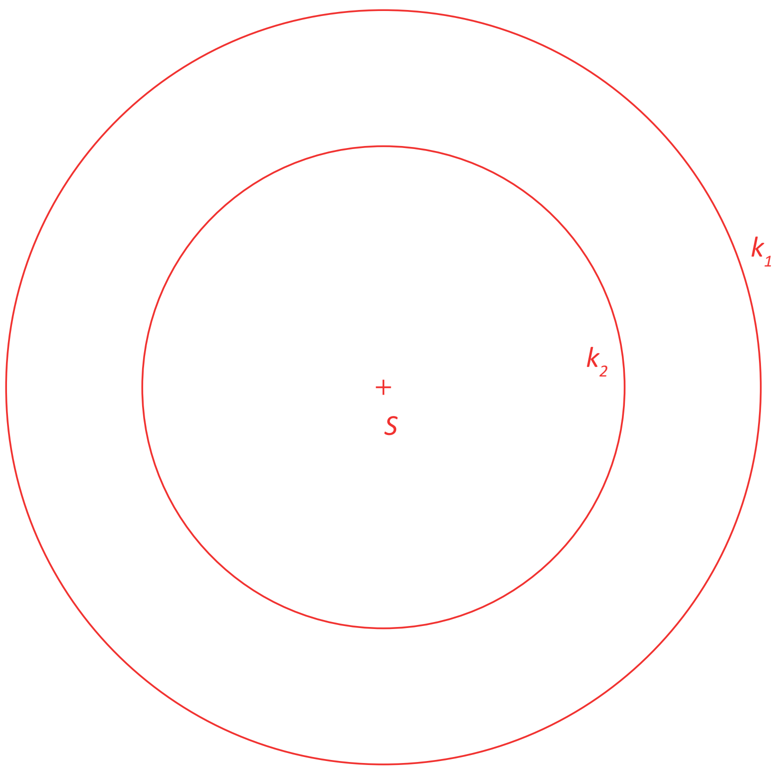
$S_p = (a + c)\ .\ v_a : 2$
$S_{pl} = (a + c + 2b)\ .\ v$

$S^* = S_p + S_{pl} = (10\ \text{m} + 18\ \text{m}) \cdot 5{,}7\ \text{m} : 2 + (10\ \text{m} + 18\ \text{m} + 14\ \text{m}) \cdot 2\ \text{m} = 79{,}8\ \text{m}^2 + 84\ \text{m}^2 = 163{,}8\ \text{m}^2$

Pri jarnom upratovaní treba vybieliť $\boxed{163{,}8}$ m².

33 ***Vypočítaj obsah medzikružia 2 sústredných kružníc, ktorých polomery sú 32 mm a 5 cm. Zostroj dané sústredné kružnice.***

$S = \pi\ .\ (r_1\ .\ r_1 - r_2\ .\ r_2)$
$S = \pi\ .\ (5\ \text{cm}\ .\ 5\ \text{cm} - 3{,}2\ \text{cm}\ .\ 3{,}2\ \text{cm})$
$S = \pi\ .\ (25\ \text{cm}^2 - 10{,}24\ \text{cm}^2)$
$S = 3{,}14\ .\ 14{,}76\ \text{cm}^2$
$S = 46{,}3464\ \text{cm}^2$



Obsah medzikružia je $\boxed{46{,}3464}$ cm².

34 ***Do nepriehľadného vrecúška sme vložili kartičky s číslami od 1 do 25. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme:***

a) číslo deliteľné štyrmi *4, 8, 12, 16, 20, 24 => m = 6; n = 25;* $P = m : n = \frac{6}{25}$

b) číslo s ciferným súčtom 8 *8, 17 => m = 2; n = 25;* $P = \frac{2}{25}$

c) prvočíslo *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 => m = 9;* $P = 9 : 25 = \frac{9}{25}$

35 ***V osudí je 80 guľôčok troch farieb – biele, modré, červené. Pravdepodobnosť vytiahnutia bielej guľôčky je 40 %. Pravdepodobnosť vytiahnutia modrej guľôčky je $\frac{1}{4}$. Vypočítaj:***

a) počet guľôčok každej farby

biele guľôčky ... 0,4 · 80 = 32

modré guľôčky ... 0,25 · 80 = 20 *červené guľôčky ... 80 – 32 – 20 = 28*

b) pravdepodobnosť vytiahnutia červenej guľôčky

m = 28; n = 80 $P = 28 : 80 = \frac{7}{20}$

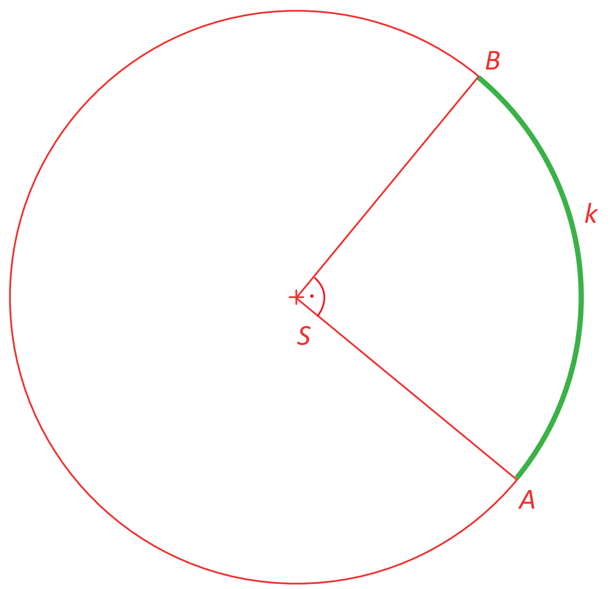
36 ***Závod na spracovanie mlieka odoberá mlieko od 10 poľnohospodárskych podnikov. Chce zaviesť systém platenia podľa kvality, preto jeho pracovník zostavil štatistický súbor podľa obsahu tuku v dodávanom mlieku. Zistené údaje sú v tabuľke. Urči aritmetický priemer tohto súboru.***

Podnik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Obsah tuku [%]	3,8	2,9	3,9	4,1	2,9	4,1	4,1	3,0	4,8	4,1

$$\frac{3{,}8 + 2{,}9 + 3{,}9 + 4{,}1 + 2{,}9 + 4{,}1 + 4{,}1 + 3{,}0 + 4{,}8 + 4{,}1}{10} = \frac{37{,}7}{10} = 3{,}77$$

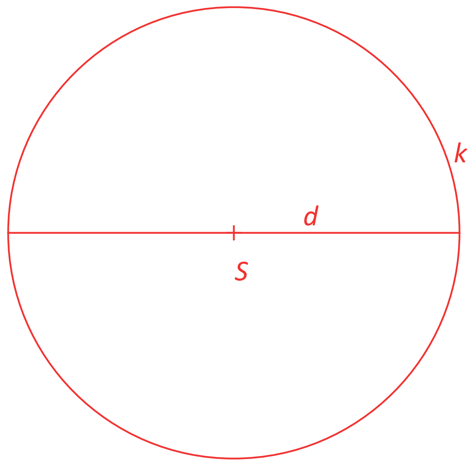
Aritmetický priemer tohto súboru je $\boxed{3{,}77}$.

37 **Narysuj kružnicu k (S; 38 mm). Vyznač na nej 2 ľubovoľné body A, B tak, aby |∢ASB| = 90 °. Farebne vyznač kružnicový oblúk prislúchajúci danému stredovému uhlu.**



38 **Je daná kružnica k (S; 30 mm). Narysuj ju, vyznač jej najdlhšiu tetivu a urči jej dĺžku.**

najdlhšia tetiva – priemer kružnice – 6 cm



39 **Vypočítaj objem a povrch pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy dlhou 7,2 cm. Výška hranola v = 5 cm.** *podstava – štvorec* $a = 7{,}2\ cm \Rightarrow o = 4 \cdot a;\ o = 4 \cdot 7{,}2\ cm = 28{,}8\ cm$

$S_p = a \cdot a$
$S_p = 7{,}2\ cm \cdot 7{,}2\ cm$
$S_p = 51{,}84\ cm^2$

$S_{pl} = o \cdot v$
$S_{pl} = 28{,}8\ cm \cdot 5\ cm$
$S_{pl} = 144\ cm^2$

$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$
$S = 2 \cdot 51{,}84\ cm^2 + 144\ cm^2$
$S = 103{,}68\ cm^2 + 144\ cm^2$
$S = 247,\ 68\ cm^2$

$V = S_p \cdot v$
$V = 51{,}84\ cm^2 \cdot 5\ cm$
$V = 259{,}2\ cm^3$

Objem pravidelného štvorbokého hranola je 259,2 cm³ a jeho povrch je 247,68 cm².

ZHRNUTIE I.

1 ***Vypočítaj.***

$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{8}{12}+\frac{9}{12}\right):\left(\frac{24}{30}-\frac{25}{30}\right)=\frac{17}{12}\cdot\left(\frac{-30}{1}\right)=\frac{-85}{2}=-42\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-16)+0,5\cdot(-5)\cdot 4 = 6+0,5\cdot(-20)=6-10=-4$

2 ***Odstráň zátvorky a zjednoduš daný výraz.***

$3a-\{2c-[6a-(c-b)+c+(a+3b-3c)]\}=$
$3a-[2c-(6a-c+b+c+a+3b-3c)]=3a-[2c-(7a+4b-3c)]=$
$=3a-(2c-7a-4b+3c)=3a-2c+7a+4b-3c=10a+4b-5c$

3 ***Rieš rovnice v množine reálnych čísel a urob skúšku správnosti.***

a) $-x=3-(6-x)$

$-x=3-6+x$
$-2x=-3$
$x=\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}=3-\left(6-\frac{3}{2}\right)$
$-\frac{3}{2}=3-6+\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}=-3+\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}=-\frac{6}{3}+\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

c) $x+4=-(2+x)$

$x+4=-2-x$
$2x=-2-4$
$2x=-6$
$x=-3$

$-3+4=-(2-3)$
$1=-(-1)$
$1=1$

b) $3x+6=2(x-5)$

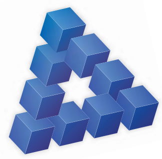
$3x+6=2x-10$
$3x-2x=-10-6$
$x=-16$

$3\cdot(-16)+6=2\cdot(-16-5)$
$-48+6=2\cdot(-21)$
$-42=-42$

d) $(-8)(x+1)=-7x+12$

$-8x-8=-7x+12$
$-8x+7x=12+8$
$-x=20$
$x=-20$

$(-8)\cdot(-20+1)=-7\cdot(-20)+12$
$(-8)\cdot(-19)=140+12$
$152=152$



4 ***Daná je kružnica k (S; r) a priamka p. Označme vzdialenosť bodu S od priamky p písmenom v. Ak platí v < r, potom priamka p sa nazýva (podčiarkni):***

dotyčnica ku kružnici k

nesečnica kružnice k

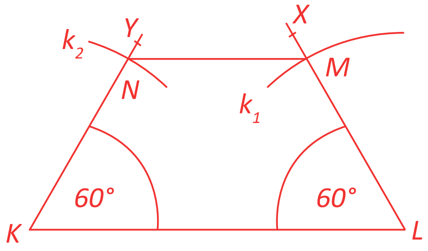
sečnica kružnice k

priemer kružnice k

tetiva kružnice k

5 ***Zostroj rovnoramenný lichobežník KLMN, pre ktorý platí, že KL II MN, |KL| = 7,4 cm, |LM| = 3,9 cm a |∢ NKL| = 60°.***

Náčrt:



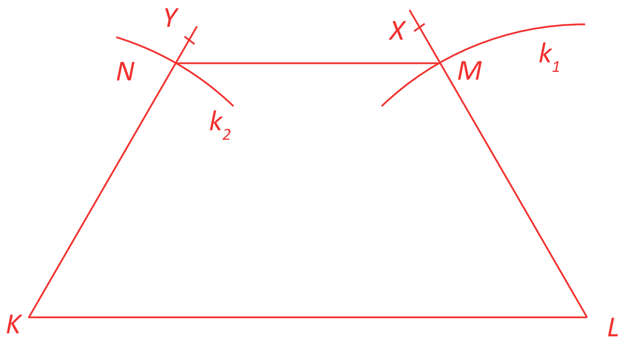
Rozbor:

Dané body: K, L
Hľadané body: M, N
M; M ∈ $\overrightarrow{LX}$ ∩ k_1
∢ KLX; |∢ KLX| = 60°
k_1; k_1 (L; 3,9 cm)
N; N ∈ $\overrightarrow{KY}$ ∩ k_2
∢ LKY; |∢ LKY| = 60°
k_2; k_2 (K; 3,9 cm)

Postup konštrukcie:

1. KL; |KL| = 7,4 cm
2. ∢ KLX; |∢ KLX| = 60°
3. k_1; k_1 (L; 3,9 cm)
4. M; M ∈ $\overrightarrow{LX}$ ∩ k_1
5. ∢ LKY; |∢ LKY| = 60°
6. k_2; k_2 (K; 3,9 cm)
7. N; N ∈ $\overrightarrow{KY}$ ∩ k_2
8. lichobežník KLMN

Konštrukcia:



Skúška správnosti: meraním
kontrolovať dané rozmery KL II MN; |KL| = 7,4 cm; |LM| = 3,9 cm; |∢ NKL| = 60°
Odpoveď: Úloha má v polrovine jedno riešenie.

6 ***Areál školy má tvar obdĺžnika s rozmermi 100 m a 80 m. Na pozemku sa nachádza budova školy s obdĺžnikovým pôdorysom 40 m × 15 m, štvorcový bazén so stranou dĺžky 20 m, dva kruhové kvetinové záhony s priemerom 6 m, kvetinový záhon v tvare rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s odvesnou dĺžky 4 m a 52 % plochy pozemku zaberajú ihriská. Ostatné časti pozemku treba vysadiť zeleňou. Na koľkých m² bude zeleň?***

Pozemok: S_p = 100 m · 80 m = 8 000 m²; Budova školy: S_1 = 15 m · 40 m = 600 m²
Bazén: S_2 = 20 m · 20 m = 400 m²; Dva kruhové kvetinové záhony: S_3 = 2 · 3,14 · 3 m · 3 m = 56,52 m²
Kvetinový záhon v tvare rovnoramenného pravouhlého trojuholníka: S_4 = (4 m · 4 m) : 2 = 8 m²
Ihrisko: S_5 = (8 000 m² : 100) · 52 = 4 160 m²
ZELEŇ: S_p – (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) = 8 000 m² – 600 m² – 400 m² – 56,52 m² – 8 m² – 4 160 m² =
= 2 775,48 m²

Zeleň bude na *2 775,48* m² pozemku.

7 ***Akvárium tvaru 4-bokého kolmého hranola s rozmermi a = 40 cm, b = 24 cm, výškou v = 27 cm je naplnené vodou do $\frac{2}{3}$ svojho objemu. Koľko litrov vody musíme priliať, aby bolo naplnené do $\frac{8}{9}$ svojho objemu?***

V = 40 cm · 24 cm · 27 cm = 25 920 cm³

$V_1 = \frac{2}{3} \cdot V = \frac{2}{3} \cdot 25\,920\text{ cm}^3 = 17\,280\text{ cm}^3$; $V_2 = \frac{8}{9} \cdot V = \frac{8}{9} \cdot 25\,920\text{ cm}^3 = 23\,040\text{ c}$

23 040 cm³ – 17 280 cm³ = 5 760 cm³ = 5,76 dm³ = 5,76 l

Do akvária musíme priliať *5,76* l vody.

ZHRNUTIE II.

1 ***Vypočítaj.***

$-3 \cdot 4 \cdot (-2) + (-8) \cdot 5 =$ *24 - 40 = -16*

$(-6 - 8) : (-14) + (15 - 20) =$ *(-14) : (-14) + (-5) = 1 - 5 = -4*

$$\left(-\frac{2}{3} + 2{,}75\right) \cdot \left(-0{,}5 + 1\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{11}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{8}{12} + \frac{33}{12}\right) \cdot \left(-\frac{4}{8} + 1\frac{1}{8}\right) = \frac{25}{12} \cdot \frac{7}{8} = \frac{175}{96} = 1\frac{79}{96}$$

$$\left(2\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{14}{5} - \frac{1}{2}\right) - \frac{8}{5} = \frac{28}{10} - \frac{5}{10} - \frac{16}{10} = \frac{7}{10}$$

2 ***Sú dané výrazy A = 3; B = 6x + 9y − 3; C = 7y + 1.***

a) sčítaj výrazy: A + B + C = *3 + (6x + 9y − 3) + (7y + 1) = 6x + 16y + 1*

b) odčítaj výrazy: B – C = *6x + 9y − 3 – (7y + 1) = 6x + 2y – 4*

c) vynásob výrazy: A · C = *3 · (7y + 1) = 21y + 3*

d) vydeľ výrazy: B : A = *(6x + 9y − 3) : 3 = 2x + 3y – 1*

3 ***Rieš rovnice v množine celých čísel a urob skúšku správnosti.***

a) x + 10 = 2 · (x + 8)

x + 10 = 2x + 16
10 – 16 = 2x – x
x = – 6

–6 + 10 = 2 · (–6 + 8)
4 = 2 · 2
4 = 4

b) x – 6 = 3 · (2 – x)

x – 6 = 6 – 3x
x + 3x = 6 + 6
4x = 12
x = 3

3 – 6 = 3 · (2 – 3)
–3 = 3 · (–1)
–3 = –3

4 ***Na školskom výlete sa zúčastnili šiestaci, siedmaci a ôsmaci. Šiestakov bolo o 5 viac ako siedmakov a ôsmakov o 3 menej ako šiestakov. Koľko šiestakov bolo na výlete, ak všetkých žiakov bolo 73?***

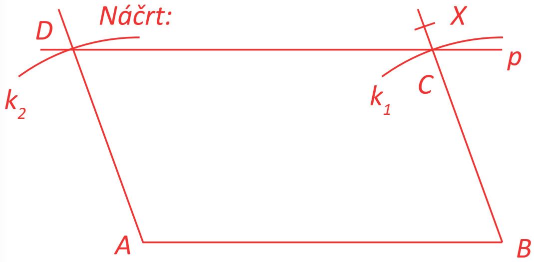
šiestakov ... x + 5
siedmakov ... x
ôsmakov ... x + 5 – 3
x + 5 + x + x + 2 = 73
3x + 7 = 73
3x = 66
x = 22

šiestakov ... 22 + 5 = 27
siedmakov ... 22
ôsmakov ... 27 – 3 = 24 (alebo 22 + 2 = 24)

skúška správnosti... 27 + 22 + 24 = 49 + 24 = 73

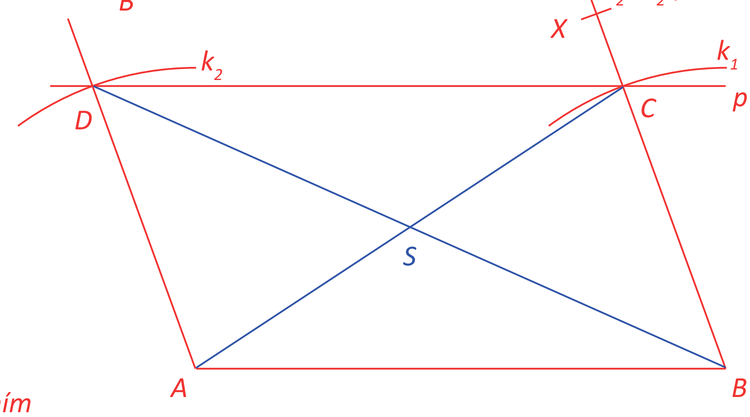
Na výlete bolo *27* šiestakov.

5 ***Zostroj kosodĺžnik ABCD, ak je dané: a = 7 cm, b = 4 cm, β = 70°. Zostroj priesečník uhlopriečok kosodĺžnika.***



Rozbor:
Dané body: A, B
Hľadané body: C, D
$C \in k_1 \cap \overrightarrow{BX}$
$\sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 70°$
k_1; k_1 (B; 4 cm)
$D \in p \cap k_2$
p; p ∥ AB; C ∈ p
k_2; k_2 (A; 4 cm)

Postup konštrukcie:
Postup konštrukcie:
1. *AB; |AB| = a = 7 cm*
2. *$\sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 70°$*
3. *k_1; k_1 (B; 4 cm)*
4. *$C \in k_1 \cap \overrightarrow{BX}$*
5. *p; p ∥ AB; C ∈ p*
6. *k_2; k_2 (A; 4 cm)*
7. *$D \in p \cap k_2$*
8. *kosodĺžnik ABCD*

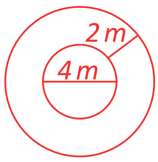


Skúška správnosti: meraním kontrolovať dané rozmery |AB| = |CD| = 7cm; |BC| = |AD| = 4 cm, $|\sphericalangle ABC| = 70°$
Odpoveď: Úloha má v polrovine jedno riešenie.

6 ***Sú dané dve kružnice k_1 (S_1; 5 cm); k_2 (S_2; 8 cm), ktoré majú spoločné práve dva body. Označme $|S_1S_2|$ = v. Podčiarkni pravdivé tvrdenie.***

v > 3 cm | v < 13 cm | 8 cm < v < 13 cm | <u>3 cm < v < 13 cm</u> | 5 cm < v < 8 cm

7 ***Na zasiatie 25 m² pôdy sa spotrebuje 1 kg trávneho osiva. Koľko kg osiva treba na zasiatie 2 m širokého pásu okolo kruhového záhona s kvetmi, ktorý má priemer 4 m?***



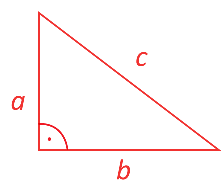
d = 4 m
r = d : 2
r = 2 m

$S = \pi \cdot [(r + 2\,m) \cdot (r + 2\,m) - r \cdot r] = \pi \cdot (4\,m \cdot 4\,m - 2\,m \cdot 2\,m) =$
$= \pi \cdot 16\,m^2 - 4\,m2 = 3{,}14 \cdot 12\,m^2 = 37{,}68\,m^2$
$37{,}68\,m^2 : 25\,\frac{m^2}{kg} = 1{,}5072\,kg$

Na zasiatie pásu okolo kruhového záhona treba *1,507* kg trávneho osiva.

8 ***Aký je povrch kolmého hranola s podstavou tvaru pravouhlého trojuholníka, ak jeho najdlhšia strana má veľkosť 10 cm a ostatné strany majú veľkosti 6 cm a 8 cm? Výška kolmého hranola je 10 cm.***

podstava



$a = 6\,cm$; $b = 8\,cm$; $c = 10\,cm$; $v = 10\,cm$; $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$
$S_p = (8\,cm \cdot 6\,cm) : 2 = 24\,cm^2$
$S_{pl} = o \cdot v = (a + b + c) \cdot v = (6\,cm + 8\,cm + 10\,cm) \cdot 10\,cm =$
$= 24\,cm \cdot 10\,cm = 240\,cm2$
$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot 24\,cm^2 + 240\,cm^2 = 48\,cm^2 + 240\,cm^2 = 288\,cm^2$
Povrch hranola je 288 cm².

II. MOCNINY A ODMOCNINY, ZÁPIS VEĽKÝCH ČÍSEL

Umocňovanie je opakované násobenie rovnakého činiteľa.

Druhá mocnina

- súčin dvoch rovnakých činiteľov
- zápis druhej mocniny: $a^2 = a \cdot a$

a^2 – mocnenec: a, mocniteľ (exponent): 2

Tretia mocnina

- súčin troch rovnakých činiteľov
- zápis tretej mocniny: $a^3 = a \cdot a \cdot a$

a^3 – mocnenec: a, mocniteľ (exponent): 3

Druhá mocnina reálneho čísla

- druhá mocnina kladného čísla je vždy kladné číslo: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
- druhá mocnina nuly je 0: $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$
- druhá mocnina záporného čísla je vždy kladné číslo: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

Tretia mocnina reálneho čísla

- tretia mocnina kladného čísla je vždy kladné číslo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- tretia mocnina nuly je 0: $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- tretia mocnina záporného čísla je vždy záporné číslo:
  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

n-tá mocnina ľubovoľného čísla s prirodzeným mocniteľom

- výraz a^n (n: prirodzené číslo; a: ľubovoľné reálne číslo)
- zápis n-tej mocniny: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činiteľov}}$

a^n – mocnenec: a, mocniteľ (exponent): n

n-tá mocnina ľubovoľného čísla s prirodzeným mocniteľom

- ak mocniteľ je párne číslo, n-tá mocnina kladného čísla je vždy kladné číslo
  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- ak mocniteľ je párne číslo, n-tá mocnina záporného čísla je vždy kladné číslo
  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$
- ak mocniteľ je nepárne číslo, n-tá mocnina kladného čísla je vždy kladné číslo
  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- ak mocniteľ je nepárne číslo, n-tá mocnina záporného čísla je vždy záporné číslo
  $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Počítanie s mocninami s prirodzeným mocniteľom

a) sčítanie
- sčítať môžeme len mocniny s rovnakým základom a mocniteľom
  $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$

b) odčítanie
- odčítať môžeme len mocniny s rovnakým základom a mocniteľom
  $2x^2 - 3x^2 = -x^2$

c) násobenie
- násobiť môžeme len mocniny s rovnakým základom tak, že základ umocníme na súčet mocniteľov
  $2x^2 \cdot 3x^3 = 2 \cdot 3 \cdot x^{2+3} = 6x^5$

d) delenie
- deliť môžeme len mocniny s rovnakým základom rôznym od nuly tak, že základ umocníme rozdielom mocniteľov
  $6x^5 : 3x^2 = (6 : 3) \cdot x^{5-2} = 2x^3$

e) umocňovanie - mocninu umocníme tak, že základ umocníme na súčin mocniteľov
  $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$

Odmocňovanie je opačná operácia k umocňovaniu.

Druhá odmocnina

- druhou odmocninou z nezáporného reálneho čísla a sa nazýva nezáporné reálne číslo b, pre ktoré platí $b^2 = a$
- zápis druhej odmocniny: $\sqrt{a}$; $a \geq 0$
- výsledok odmocnenia: $\sqrt{a} = b$; $b \geq 0$

znak odmocniny

$\sqrt{a}$

odmocnenec

Tretia odmocnina

- treťou odmocninou z nezáporného reálneho čísla a sa nazýva nezáporné reálne číslo b, pre ktoré platí $b^3 = a$
- zápis tretej odmocniny: $\sqrt[3]{a}$; $a \geq 0$
- výsledok odmocnenia: $\sqrt[3]{a} = b$; $b \geq 0$

znak odmocniny

odmocniteľ $\sqrt[3]{a}$

odmocnenec

Druhá odmocnina nezáporného reálneho čísla

$\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{4} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} = 2$

$\sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{4^2} = 4$

Tretia odmocnina nezáporného reálneho čísla

$\sqrt[3]{0} = 0$

$\sqrt[3]{1} = 1$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{10 \cdot 10 \cdot 10} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

Počítanie s druhou odmocninou

- súčin druhých odmocnín čísel a, b sa rovná druhej odmocnine ich súčinu

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $a \geq 0$; $b \geq 0$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

- podiel druhých odmocnín čísel a, b sa rovná druhej odmocnine ich podielu

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \geq 0$; $b > 0$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Počítanie s treťou odmocninou

- súčin tretích odmocnín čísel a, b sa rovná tretej odmocnine ich súčinu

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$, $a \geq 0$; $b \geq 0$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

- podiel tretích odmocnín čísel a, b sa rovná tretej odmocnine ich podielu

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $a \geq 0$; $b > 0$

$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Vedecký zápis čísel

- číslo vyjadríme ako mocninu čísla 10
- je to zápis veľkých a malých čísel v tvare $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in Z$
- vedecký zápis veľkého čísla: $3\,000 = 3 \cdot 10^3$
- vedecký zápis malého čísla: $0{,}00005 = 5 \cdot 10^{-5}$

1 *Zapíš pomocou symbolov druhej a tretej mocniny (nepočítaj):*

ČÍSLO	4	–5	0	1,3	–2,08	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{6}$	$-5\frac{1}{2}$
Druhá mocnina	4^2	$(-5)^2$	0^2	$(1,3)^2$	$(-2,08)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(-\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(1\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(-5\frac{1}{2}\right)^2$
Tretia mocnina	4^3	$(-5)^3$	0^3	$(1,3)^3$	$(-2,08)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(-\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(1\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(-5\frac{1}{2}\right)^3$

2 ***Vypočítaj mocniny a výsledky usporiadaj zostupne. Vypočítaj podiel súčtu a rozdielu absolútnych hodnôt navzájom opačných čísel.***

súčet absolútnych hodnôt ... 0,04 + 0,04 = 0,08 *0,008 + 0,008 = 0,016*
rozdiel absolútnych hodnôt ... 0,04 - 0,04 = 0 *0,008 - 0,008 = 0*

$-0,2^2 = -0,04$ $(-0,2)^2 = 0,04$ $0,2^3 = 0,008$

$(-0,2)^3 = -0,008$ $0,2^0 = 1$ $0,2^1 = 0,2$

podiel súčtu a rozdielu ... 0,08 : 0 = NR 0,016 : 0 = NR

$0,2^0$	$0,2^1$	$(-0,2)^2$	$0,2^3$	$-(0,2)^3$	$-0,2^2$
1	0,2	0,04	0,008	–0,008	–0,04

3 **Doplň chýbajúce čísla podľa vzoru tak, aby si vytvoril/-a trojice: $x \to x^2 \to x^3$.**

–3 → 9 → –27
–0,8 → 0,64 → –0,512
$-\frac{1}{3}$ → $\frac{1}{9}$ → $-\frac{1}{27}$
–1 → 1 → –1
$\pm\frac{2}{5}$ → $\frac{4}{25}$ → $\pm\frac{8}{125}$
±0,3 → 0,09 → ±0,027
$\frac{5}{8}$ → $\frac{25}{64}$ → $\frac{125}{512}$
$\frac{4}{5}$ → $\frac{16}{25}$ → $\frac{64}{125}$
–0,5 → 0,25 → –0,125
$-\frac{3}{4}$ → $\frac{9}{16}$ → $-\frac{27}{64}$
±2 → 4 → ±8
±0,2 → 0,04 → ±0,008
0,4 → 0,16 → 0,064
5 → 25 → 125
$\frac{1}{9}$ → $\frac{1}{81}$ → $\frac{1}{729}$
0 → 0 → 0
1 → 1 → 1
8 → 64 → 512
0,6 → 0,36 → 0,216
–0,1 → 0,01 → –0,001
$\frac{2}{3}$ → $\frac{4}{9}$ → $\frac{8}{27}$

4 ***Usporiadaj čísla podľa veľkosti vzostupne. O koľko je najmenšia mocnina menšia ako najväčšia mocnina?***

7^0; 3^3; $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$; 11^2; 6^2; 0^2

$11 \cdot 11 - \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) = 121 + \frac{9}{4} = 123\frac{1}{4} = 123,25$

o 123,25

$-(3/2)^2$	0^2	7^0	3^3	6^2	11^2
-2,25	0	1	27	36	121

5 ***Zakrúžkuj správne usporiadania.***

a) $(-3)^2 > 2^3 > (-2)^2 > (-1)^2 > (-3)^3$ $\quad 9 > 8 > 4 > 1 > -27$

b) $3^2 > 2^3 > (-2)^2 > (-2)^3 > (-3)^2$ $\quad 9 > 8 > 4 > -8 > 9$

c) $3^3 > 2^3 > (-3)^2 > (-2)^2 > (-2)^3$ $\quad 27 > 8 > 9 > 4 > -8$

d) $3^2 > 2^3 > (-2)^2 > (-2)^3 > (-3)^3$ $\quad 9 > 8 > 4 > -8 > -27$

6 ***Číslo 81 vieme zapísať v tvare mocniny viacerými možnosťami, napr. 81 = $81^1 = 9^2 = 3^4$. Zapíš dve ďalšie čísla podobným spôsobom.***

1. číslo: 16 $\quad 16 = 16^1;\ 16 = 4^2;\ 16 = 2^4$

2. číslo: 64 $\quad 64 = 64^1;\ 64 = 8^2;\ 64 = 2^6$

7 ***Vypočítaj podľa vzoru.***

$70^2 = (7 \cdot 10)^2 = 7^2 \cdot 10^2 = 49 \cdot 100 = 4\,900$

$40^2 = (4 \cdot 10)^2 = 4^2 \cdot 10^2 = 16 \cdot 100 = 1600$

$20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1\,000 = 8\,000$

$500^2 = (5 \cdot 100)^2 = 5^2 \cdot 100^2 = 25 \cdot 10\,000 = 250\,000$

$130^2 = (13 \cdot 10)^2 = 13^2 \cdot 10^2 = 169 \cdot 100 = 16\,900$

$300^3 = (3 \cdot 100)^3 = 3^3 \cdot 100^3 = 21 \cdot 1\,000\,000 = 27\,000\,000$

$1\,500^2 = (15 \cdot 100)^2 = 15^2 \cdot 100^2 = 225 \cdot 10\,000 = 2\,250\,000$

$0{,}3^2 = (3 \cdot 0{,}1)^2 = 3^2 \cdot 0{,}1^2 = 9 \cdot 0{,}01 = 0{,}09$

$0{,}5^2 = (5 \cdot 0{,}1)^2 = 5^2 \cdot 0{,}1^2 = 25 \cdot 0{,}01 = 0{,}25$

$0{,}2^3 = (2 \cdot 0{,}1)^3 = 2^3 \cdot 0{,}1^3 = 8 \cdot 0{,}001 = 0{,}008$

$0{,}11^2 = (11 \cdot 0{,}01)^2 = 11^2 \cdot 0{,}01^2 = 121 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0121$

$0{,}008^2 = (8 \cdot 0{,}001)^2 = 8^2 \cdot 0{,}001^2 = 64 \cdot 0{,}000001 = 0{,}000064$

$0{,}04^3 = (4 \cdot 0{,}01)^3 = 4^3 \cdot 0{,}01^3 = 64 \cdot 0{,}000001 = 0{,}000064$

$0{,}016^2 = (16 \cdot 0{,}001)^2 = 16^2 \cdot 0{,}001^2 = 256 \cdot 0{,}000001 =$
$= 0{,}000256$

8 ***Vypočítaj.***

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$

$2^2 - 3^2 = 4 - 9 = -5$

$8^2 : 4^2 = 64 : 16 = 4$

$3^2 + 5^2 + 1^2 = 9 + 25 + 1 = 35$

$1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$

$5^2 - 3^3 = 25 - 27 = -2$

9 ***Vypočítaj.***

$(-2)^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$

$-2 \cdot 6^2 + 4^2 = -72 + 16 = -56$

$-8^2 : 4^3 = -64 : 64 = -1$

$10^2 - (4^2 - 3 \cdot 5)^3 = 100 - 1 = 99$

$8^2 - (-4)^3 = 64 - (-64) = 128$

$(-5)^3 - (-5)^2 = -125 - 25 = -150$

$2^2 \cdot (3 - 2^2)^2 = 4 \cdot 1 = 4$

$(12 - 3^2)^2 + (4 - 2 \cdot 3)^3 = 9 - 8 = 1$

10 ***Vypočítaj.***

$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$\left(\frac{4}{-3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$

$\left(\frac{1-3}{2 \cdot 5}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{10^2} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

$\left(\frac{1-2}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$

11 Vypočítaj a porovnaj.

2^2 $\boxed{>}$ -2^2 $\quad 4 > -4$	$(-3)^2$ $\boxed{>}$ -3^2 $\quad 9 > -9$	$(2 \cdot 3)^2$ $\boxed{=}$ $2^2 \cdot 3^2$ $\quad 36 = 36$
2^2 $\boxed{=}$ 4 $\quad 4 = 4$	$(-3)^2$ $\boxed{=}$ 9 $\quad 9 = 9$	$(2 \cdot 3)^2$ $\boxed{=}$ 36 $\quad 36 = 36$
-2^2 $\boxed{<}$ 4 $\quad -4 < 4$	-3^2 $\boxed{=}$ -9 $\quad 9 = 9$	$-2^2 \cdot 3^2$ $\boxed{<}$ 36 $\quad 36 < 36$
$(3 + 2^2)^2$ $\boxed{>}$ $3^2 + 4^2$ $\quad 49 > 25$	$(3 + 2^2)^2$ $\boxed{=}$ 49 $\quad 49 = 49$	$3^2 + 2^2$ $\boxed{<}$ 25 $\quad 13 < 25$

12 Vypočítaj.

$5^2 + 3^3 \cdot 5^2 = 25 + 27 \cdot 25 = 25 + 675 = 700$

$6^2 + 3^3 \cdot 2^2 = 36 + 27 \cdot 4 = 36 + 108 = 144$

$-4^2 + (-4)^2 = -16 + 16 = 0$

$-3^3 - (-3)^3 = -27 - (-27) = -27 + 27 = 0$

13 Priraď k daným príkladom správny výsledok a z písmen získaš tajničku, v ktorej sa ukrýva meno významného svetového fyzika. Zisti pomocou internetu, koľko mal rokov, keď získal Nobelovu cenu za fyziku.

Príklad	Výsledok	Výpočet	
$-2^3 \cdot 0^3 \cdot 10$	25 (I)	$-8 \cdot 0 \cdot 10 = 0$	E
$[(10 - 2) - 3]^2$	−14 (S)	$(8 - 3)^2 = 5^2 = 25$	I
$[(3 - 7) - 3]^3$	−25 (E)	$(-4 - 3)^3 = (-7)^3 = -343$	N
$7^2 - 8^2 + 1^3$	0 (E)	$49 - 64 + 1 = -14$	S
$(-1)^3 + 13^2$	0,32 (N)	$-1 + 169 = 168$	T
$5^2 \cdot (3 - 2^2)$	168 (T)	$25 \cdot (3 - 4) = 25 \cdot (-1) = -25$	E
$(17 - 5)^2 + (4 - 2 \cdot 3)^3$	−343 (N)	$12^2 + (4 - 6)^3 = 144 + (-2)^3 = 144 - 8 = 136$	I
$0{,}7^2 + 0{,}8^2 - 0{,}9^2$	136 (I)	$0{,}49 + 0{,}64 - 0{,}81 = 0{,}32$	N

EINSTEIN, 42 rokov

14 Vypočítaj spamäti a over na kalkulačke.

$0{,}6^2 + 0{,}1^2 = 0{,}36 + 0{,}01 = 0{,}37$

$-0{,}08^2 : 2^2 = -0{,}0064 : 4 = -0{,}0016$

$0{,}9^2 + (-0{,}3)^2 = 0{,}81 + 0{,}09 = 0{,}9$

$(-0{,}2 \cdot 5)^3 = (-1)^3 = -1$

15 S využitím zápisu mocnín zapíš dané vzorce.

a) obsah štvorca $\quad S = a^2$

b) objem kocky $\quad V = a^3$

c) obsah kruhu $\quad S = \pi \cdot r^2$

d) povrch kocky $\quad P = 6 \cdot a^2$

16 Monike kúpili rodičia do izby zrkadlo. To malo tvar štvorca s dĺžkou strany a = 7,8 dm. Akú veľkú plochu v dm² zakryje na stene v Monikinej izbe?

$S = a^2 = (7{,}8\ dm)^2 = 60{,}84\ dm^2$

Zrkadlo zakryje plochu $\boxed{60{,}84}$ dm².

17 ***Patrícia si na piesočnú pláž doniesla nádobu v tvare kocky s hranou dĺžky 72 mm. Naplnila ju pieskom z pláže. Koľko decilitrov piesku obsahovala nádoba?***

a = 72 mm = 0,72 dm
$V = a^3 = (0{,}72\ \text{dm})^3 = 0{,}373248\ \text{dm}^3 = 0{,}373248\ \text{l} = 3{,}73248\ \text{dl}$

Nádoba obsahovala *3,73248* dl piesku.

18 ***Súčet dĺžok hrán kocky je 132 cm. Vypočítaj povrch tejto kocky.***

A) 726 cm² B) 1 331 cm² C) 484 cm² D) 762 cm²

$12a = 132$ cm; $a = 11$ cm
$P = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (11\ \text{cm})^2 = 6 \cdot 121\ \text{cm}^2 = 726\ \text{cm}^2$

Povrch kocky je *726* cm².

19 ***Doplň tabuľku.***

SÚČIN ČINITEĽOV	MOCNINA	MOCNENEC	MOCNITEĽ
6 · 6 · 6 · 6	*6^4*	*6*	*4*
4 · 4 · 4 · 4 · 4 · 4 · 4 · 4	4^8	*4*	*8*
5 · 5 · 5 · 5 · 5 · 5	*5^6*	5	6
12 · 12 · 12 · 12 · 12 · 12 · 12	*12^7*	*12*	*7*
7 · 7 · 7 · 7 · 7	7^5	*7*	*5*

20 ***Vypočítaj $\frac{1}{25}$ z 5^{47}.***

$\frac{1}{25} \cdot 5^{47} = \frac{5^{47}}{5^2} = 5^{47-2} = 5^{45}$

21 ***Vyfarbi, ktoré z uvedených čísel sa rovná štvrtine z čísla 8^{888}.***

$\frac{1}{4} \cdot 8^{888} = \frac{1}{2^2} \cdot \left(2^3\right)^{888} = \frac{2^{2664}}{2^2} = 2^{2\,662}$

2^{222} $2^{2\,662}$ 2^{888} $2^{1\,776}$

22 ***Vypočítaj trojnásobok čísla 9^{27}. Výsledok uveď v tvare mocniny čísla 3.***

$3 \cdot 9^{27} = 3 \cdot (3^2)^{27} = 3 \cdot 3^{54} = 3^{1+54} = 3^{55}$

Trojnásobok čísla 9^{27} v tvare mocniny čísla 3 je 3^{55}.

23 ***Každý trezor ukrýva sumu, ktorú vyjadruje jeho meno. Zapíš pod každý trezor, aká je v ňom hotovosť (v tvare mocniny čísla 10). Očísluj trezory v poradí od 1 do 6 vzostupne.***

MILIARDA

číslo trezora: *2.* zápis: *10^9*

MILIÓN

číslo trezora: *1.* zápis: *10^6*

BILIARDA

číslo trezora: *4.* zápis: *10^{15}*

TRILIARDA

číslo trezora: *6.* zápis: *10^{21}*

TRILIÓN

číslo trezora: *5.* zápis: *10^{18}*

BILIÓN

číslo trezora: *3.* zápis: *10^{12}*

24 ***V nasledujúcej tabuľke sú uvádzané niektoré hodnoty týkajúce sa vybraných planét našej slnečnej sústavy.***

a) Doplň chýbajúce údaje. (Pomôcka: AU = Astronomická jednotka = 150 miliónov km)

PLANÉTA	VZDIALENOSŤ OD SLNKA v km	VZDIALENOSŤ OD SLNKA v km (SKRÁTENE)	VZDIALENOSŤ OD SLNKA v AU	HMOTNOSŤ	HMOTNOSŤ v kg (SKRÁTENE)
Venuša	58 miliónov	*$5{,}8 \cdot 10^7$*	*0,39*	$\frac{4}{5}$ hmotnosti Zeme	*$4{,}8 \cdot 10^{24}$*
Zem	150 miliónov	$1{,}5 \cdot 10^8$	1	1	$6 \cdot 10^{24}$
Mars	*228 miliónov*	$2{,}28.\ 10^8$	1,52	$\frac{1}{10}$ hmotnosti Zeme	$6 \cdot 10^{23}$
Saturn	1,43 miliardy	*$1{,}43 \cdot 10^9$*	*9,53*	93-násobok Zeme	$5{,}58.\ 10^{26}$
Neptún	*4,49 miliardy*	$4{,}49 \cdot 10^9$	*29,93*	17-násobok Zeme	*$1{,}02.\ 10^{26}$*

b) Odhadni súčet hmotností planét z tabuľky. Svoj odhad over výpočtom. Výsledok zapíš v tvare $a \cdot 10^n$ kg, kde $n \in N$, $1 \le a < 10$ (zaokrúhli na 2 desatinné miesta). *samostatná práca žiakov – odhad*

súčet ... premeniť čísla na násobky 10^{24}
$(4{,}8 + 6 + 0{,}6 + 558 + 102) \cdot 10^{24} = 671{,}4 \cdot 10^{24} = 6{,}714 \cdot 10^{26}$

25 ***Zapíš v tvare $a \cdot 10^n$, kde $n \in N$, $1 \le a < 10$.***

1 km = *1 000 = $1 \cdot 10^3$* m	5 m = *5 000 = $5 \cdot 10^3$* mm
0,25 dm = *25 = $2{,}5 \cdot 10^1$* mm	17 km = *17 000 000 = $1{,}7 . 10^7$* mm
0,6 m = *60 = $6 \cdot 10^1$* cm	1 300 dm = *13 000 = $1{,}3 \cdot 10^4$* cm
4 900 m = *49 000 = $4{,}9 \cdot 10^4$* dm	0,1 km = *10 000 = $1 \cdot 10^4$* cm
3 568 m = *3 568 000 = $3{,}568 \cdot 10^6$* mm	0,003 km = *30 = $3 \cdot 10^1$* dm

26 ***Štát má rozlohu po zaokrúhlení na tisícky 2 780 000 km². Zisti na internete, o ktorý štát ide. Ktorá z možností vyjadruje zápis v tvare $a \cdot 10^n$, kde $n \in N$, $1 \le a < 10$?***

Argentína

A) $27{,}8 \cdot 10^5$ km² B) $2{,}78 \cdot 10^4$ km² *C) $2{,}78 \cdot 10^6$ km²* D) $278 \cdot 10^4$ km²

27 ***Zapíš dané čísla v desiatkovej pozičnej sústave podľa vzoru. Použi pritom mocniny čísla 10.***

$524 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

$326 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

$5\,360 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

$65\,805 = 6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

$109\,568 = 1 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

$3{,}8 = 3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1}$

$0{,}28 = 0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$

$48{,}25 = 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$

$503{,}321 = 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$

28 ***Zapíš, aby platila rovnosť:***

$3a = b \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^c$	a = *6* b = *3* c = *0*
$6a7 = b \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$	a = *4* b = *6* c = *7*
$0{,}4 = a \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^b$	a = *0* b = *−1*
$30{,}821 = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^c + 2 \cdot 10^d + e \cdot 10^{-3}$	a = *3* b = *0* c = *−1* d = *−2* e = *1*
$9\,609 = a \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^b + 0 \cdot 10^c + 9 \cdot d^0$	a = *9* b = *2* c = *1* d = *10*

29 ***Zapíš čísla podľa zadania.***

a) Zapíš čísla v tvare $a \cdot 10^n$, kde $n \in N$, $1 \le a < 10$.

$6\,800\,000 = 6{,}8 \cdot 10^6$

$15\,000\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 10^{10}$

$850\,000\,000 = 8{,}5 \cdot 10^8$

b) Zapíš čísla ako prirodzené.

$8{,}9 \cdot 10^8 = 890\,000\,000$

$0{,}9 \cdot 10^{12} = 900\,000\,000\,000$

$1{,}2 \cdot 10^5 = 120\,000$

30 ***Vypočítaj spamäti a over písomne.***

$3 \cdot 10^2 = 300$

$1{,}5 \cdot 10^4 = 15\,000$

$0{,}24 \cdot 10^5 = 24\,000$

$2{,}125 \cdot 10^6 = 2\,125\,000$

$0{,}014 \cdot 10^9 = 14\,000\,000$

$0{,}5 \cdot 10^{10} = 5\,000\,000\,000$

31 ***V tele každého človeka sa v priebehu každej sekundy rozloží $4 \cdot 10^5$ rádioaktívnych atómov na iné atómy. Ak sa ti to zdá veľa, alebo sa začínaš obávať, zachovaj pokoj. Každú bunku v tele tvorí až $2{,}25 \cdot 10^8$-krát viac atómov. Koľko to je atómov? To je už úloha pre teba.***

$4 \cdot 10^5 \cdot 2{,}25 \cdot 10^8 = 9 \cdot 10^{13}$

Každá bunka v tele sa skladá z $\boxed{\text{90 biliónov, t. j. } 9 \cdot 10^{13}}$ atómov.

32 ***Zapíš s využitím symbolov druhej a tretej odmocniny (nepočítaj):***

a) tretiu odmocninu čísla 15 $\sqrt[3]{15}$

b) druhú odmocninu, ak jej základ je číslo 49 $\sqrt{49}$

33 ***Do zelených útvarov doplň druhú odmocninu daného čísla, do modrých útvarov doplň tretiu odmocninu daného čísla.***

0,064 | 0,4

8 | 2

0,16 | 0,4

10 000 | 100

1 | 1

1 000 000 | 100

36 | 6

1,331 | 1,1

0,001 | 0,1

8 100 | 90

1 | 1

0,0049 | 0,07

4 | 2

27 000 | 30

125 | 5

1,21 | 1,1

640 000 | 800

34 ***Odmocni.***

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$

$\sqrt{90\,000} = 300$

$\sqrt{1\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$

$-\sqrt{0{,}025} = -0{,}158$

$\sqrt{12 \cdot 12} = 12$

35 ***Doplň tabuľku. Desatinné čísla zaokrúhli na 2 desatinné miesta.***

x	8	4	9	5	27
x^2	64	16	81	25	729
$\sqrt{x}$	2,83	2	3	2,24	5,20
x^3	512	64	729	125	19 683
$\sqrt[3]{x}$	2	1,59	2,08	1,71	3

36 Desať je dvojnásobok druhej odmocniny čísla (zakrúžkuj):

$2 \cdot \sqrt{25} = 10$

A) 100 B) 49 C) 25 D) 36

37 Vypočítaj.

$-\sqrt{4^2} = -4$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$

$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4}$

$\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$

$-\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 = -\frac{1}{2}$

38 Vypočítaj.

$\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

$\sqrt{100} - 36 = 10 - 36 = -26$

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$

$\sqrt{361} + \sqrt{256} - 35 = 19 + 16 - 35 = 0$

39 Vypočítaj a výsledky porovnaj.

$\overset{2}{\sqrt{4}}\ \boxed{<}\ \overset{6}{\sqrt[3]{216}}$

$\overset{-2}{-\sqrt[3]{8}}\ \boxed{<}\ \overset{2}{\sqrt{4}}$

$\overset{5}{\sqrt{25}}\ \boxed{>}\ \overset{3}{\sqrt[3]{27}}$

$\overset{6}{\sqrt{36}}\ \boxed{>}\ \overset{5}{\sqrt[3]{125}}$

$\overset{6}{\sqrt{4 \cdot 9}}\ \boxed{=}\ \overset{6}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}}$

$\overset{6}{\sqrt[3]{8 \cdot 27}}\ \boxed{=}\ \overset{6}{\sqrt{36}}$

40 Vypočítaj a výsledky usporiadaj zostupne. Vypočítaj súčin najmenšieho spoločného deliteľa prvého a tretieho čísla a najväčšieho spoločného deliteľa druhého a štvrtého čísla z usporiadaných čísel.

$\sqrt{(36+64)} = \sqrt{100} = 10$

$36 + \sqrt{64} = 36 + 8 = 44$

$\sqrt{36} + 64 = 6 + 64 = 70$

$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

$\boxed{70}\ \boxed{44}\ \boxed{14}\ \boxed{10}$

$70 = 10 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
$14 = 2 \cdot 7$
$n = 2$

$44 = 4 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 11$
$10 = 2 \cdot 5$
$D = 2$

súčin $2 \cdot 2 = 4$

Riešením súčinu je číslo 4.

41 Porovnaj hodnoty mocnín a odmocnín.

$\overset{9}{\sqrt{81}}\ \boxed{=}\ \overset{9}{(-3)^2}$

$\overset{-8}{(-2)^3}\ \boxed{<}\ \overset{-7}{-\sqrt{49}}$

$\overset{12}{\sqrt{144}}\ \boxed{<}\ \overset{16}{(-4)^2}$

$\overset{8}{\sqrt{64}}\ \boxed{=}\ \overset{8}{2^3}$

42 Vypočítaj. Koľko 1-ciferných prvočísel sa nachádza v súčte všetkých súčinov?

$\sqrt{9} \cdot 16 = 3 \cdot 16 = 48$

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

$\sqrt{25} \cdot 49 = 5 \cdot 49 = 245$

$\sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35$

$\sqrt{81} \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$

$\sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18$

$\sqrt{144} \cdot 64 = 12 \cdot 64 = 768$

$\sqrt{144} \cdot \sqrt{64} = 12 \cdot 8 = 96$

$7 \cdot \sqrt{64} = 7 \cdot 8 = 56$

$48 + 35 + 768 + 12 + 36 + 96 + 245 + 18 + 56 = 1314$ jedno pvočíslo (3)

43 Vypočítaj.

$\sqrt{225} - 3 \cdot \sqrt{16} + 10 \cdot \sqrt{121} = 15 - 3 \cdot 4 + 10 \cdot 11 = 15 - 12 + 110 = 113$

$\sqrt{100 - 36} - 5 \cdot \sqrt{875 + 25} = 8 - 5 \cdot 30 = 8 - 150 = -142$

$\sqrt{169} - 4 \cdot \sqrt{36} + 8 \cdot \sqrt{144} = 13 - 4 \cdot 6 + 8 \cdot 12 = 13 - 24 + 96 = 85$

44 Vypočítaj a výsledky porovnaj.

$\underbrace{\sqrt{9} \cdot 16}_{48} \;\boxed{>}\; \underbrace{\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}}_{12}$

$\underbrace{\sqrt{25} \cdot 49}_{245} \;\boxed{>}\; \underbrace{\sqrt{25} \cdot \sqrt{49}}_{35}$

$\underbrace{\sqrt{81} \cdot 4}_{36} \;\boxed{>}\; \underbrace{\sqrt{81} \cdot \sqrt{4}}_{18}$

$\underbrace{\sqrt{144} \cdot 64}_{768} \;\boxed{>}\; \underbrace{\sqrt{144} \cdot \sqrt{64}}_{96}$

45 Vypočítaj.

$7\sqrt{81} - 3 \cdot \sqrt{64} = 7 \cdot 9 - 3 \cdot 8 = 63 - 24 = 39$

$$\sqrt{\frac{16}{144}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{12} + \frac{2}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21} = \frac{13}{21}$$

$-4 \cdot \sqrt{64} + 7 \cdot \sqrt{25} - \sqrt{9} = -4 \cdot 8 + 7 \cdot 5 - 3 = -32 + 35 - 3 = 0$

$\sqrt{(5{,}4 + 4{,}6)^2} \cdot \sqrt{(8{,}6 - 2{,}6)^2} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{6^2} = 10 \cdot 6 = 60$

46 Vypočítaj.

$\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$(2 - 5)^2 + 2 \cdot 5^2 = 3^2 + 2 \cdot 25 = 9 + 50 = 59$

$\sqrt{25} + 2 \cdot (\sqrt{9} - \sqrt{16}) - 3 \cdot \sqrt{64} = 5 + 2 \cdot (3 - 4) - 3 \cdot 8 = 5 - 2 - 24 = -21$

$$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{-\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{27}_{\,9}}\right) = -\frac{4}{9}$$

47 Vypočítaj bez použitia kalkulačky.

$\sqrt{64}-\sqrt[3]{1} = 8 - 1 = 7$

$\sqrt[3]{8}+\sqrt{100} = 2 + 10 = 12$

$\sqrt{8\,100}-\sqrt{640\,000} = 90 - 800 = -710$

$\sqrt{25}-\sqrt[3]{1}+\sqrt{16} = 5 - 1 + 4 = 8$

$\sqrt[3]{0{,}008}+\sqrt{0{,}25} = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$

$\sqrt{0{,}2\cdot 3{,}2}-\sqrt[3]{0{,}5\cdot 2} = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$

48 K náčrtu jednotlivých štvorcov doplň na základe uvedeného obsahu dĺžku strany štvorca.

A	B	C	D
36 m²	121 cm²	2,25 dm²	10 000 mm²
$a = \sqrt{36}$ m	$a = \sqrt{121}$ cm	$a = \sqrt{2{,}25}$ dm	$a = \sqrt{10\,000}$ mm
a = 6 m	a = 11 cm	a = 1,5 dm	a = 100 mm (= 0,1 m)

49 Vypočítaj.

$8\cdot\sqrt{225}+4^3 = 8\cdot 15 + 64 = 120 + 64 = 184$

$2\cdot\sqrt[3]{0{,}008}-0{,}089 = 2\cdot 0{,}2 - 0{,}089 =$
$= 0{,}4 - 0{,}089 = 0{,}311$

$7+3^3-\sqrt[3]{125} = 7 + 27 - 5 = 29$

$-\dfrac{\sqrt[3]{0{,}001}}{\sqrt{78+43}} = -\dfrac{0{,}1}{\sqrt{121}} = \dfrac{\frac{-1}{10}}{11} = \dfrac{-1}{110}$

$-10\cdot\sqrt[3]{475-475} = -10\cdot 0 = 0$

$\dfrac{\sqrt[3]{27-26}}{9^2} = \dfrac{1}{81}$

$\left(-\sqrt{7}\right)^2 - 2\cdot 10^2 = 7 - 200 = -193$

$\sqrt[3]{0{,}027}-\sqrt{0{,}0001} = 0{,}3 - 0{,}01 = 0{,}29$

$\sqrt{(15{,}4+14{,}6)^2} = \sqrt{(30)^2} = 30$

$\sqrt[3]{0{,}027}+9\cdot 0{,}1^2 = 0{,}3 + 9\cdot 0{,}01 =$
$= 0{,}3 + 0{,}09 = 0{,}39$

$-\sqrt[3]{64}-3\cdot 11^2 = -4 - 3\cdot 121 = -4 - 363 = -367$

$\dfrac{-9^2}{\sqrt[3]{27}} = -\dfrac{81}{3} = -27$

50 ***Urči dĺžku polomeru kruhu v cm, ak jeho obsah je S.***

a) $S = 2{,}16\ m^2$

$r = \sqrt{S : \pi} = 0{,}829\ m = 82{,}9\ cm$

b) $S = 24{,}16\ km^2$

$r = \sqrt{S : \pi} = 2{,}773854\ km = 27\ 7385{,}4\ cm$

c) $S = 244\ dm^2$

$r = \sqrt{S : \pi} = 8{,}815\ dm = 88{,}15\ cm$

d) $S = 2\ 480\ mm^2$

$r = \sqrt{S : \pi} = 28{,}1\ mm = 2{,}81\ cm$

51 ***Ktoré číslo treba pripočítať k druhej odmocnine z čísla 144, aby sme dostali číslo 27?***

$\sqrt{144} + x = 27$

$12 + x = 27$

$x = 27 - 12$

$x = 15$

Číslo: 15

52 ***Ktoré číslo treba odčítať od druhej odmocniny z čísla 169, aby sme dostali číslo 9?***

$\sqrt{169} - x = 9$

$13 - x = 9$

$13 - 9 = x$

$x = 4$

Číslo: 4

53 ***Školský dvor mal tvar štvorca so stranou 110 m. Plocha dvora sa zväčšila o 1 125 m² a opäť má tvar štvorca.***

a) O koľko % sa zväčšila výmera voči pôvodnej veľkosti plochy?

$S = 110\ m \cdot 110\ m = 12\ 100\ m^2$

Plocha po zväčšení: $12\ 100\ m^2 + 1\ 125\ m^2 = 13\ 225\ m^2$; $(1\ 125 \cdot 100) : 12\ 100 = 9{,}29 \doteq 9\ \%$

Výmera školského dvora sa zväčšila o $\boxed{9}$ %.

b) O koľko metrov sa zväčšila strana štvorca?

$\sqrt{13\ 225} = 115$

$115\ m - 110\ m = 5\ m$

Strana štvorca sa zväčšila o $\boxed{5}$ m.

54 ***Mestskí poslanci sa rozhodli, že dajú pri škole vybudovať detské a volejbalové ihrisko. Volejbalové ihrisko bude mať tvar obdĺžnika s rozmermi 18 m x 9 m. Obklopené bude voľnou zónou, ktorej šírka na všetkých stranách budú 3 m. Detské ihrisko bude mať tvar štvorca. Plocha obidvoch ihrísk bude rovnaká. Dĺžka strany detského ihriska bude:***

A) 17 m B) 18 m *C) 19 m* D) 20 m

Rozmery volejbalového ihriska: 18 m + 6 m = 24 m; 9 + 6 m = 15 m
plocha: 24 m · 15 m = 360 m².
Strana detského ihriska
$S = a$
$a = \sqrt{S} = \sqrt{360\ m^2} = 18{,}97\ m \doteq 19\ m$

55 ***O koľko je polovica tretej odmocniny z čísla 64 menšia ako dvojnásobok druhej mocniny čísla 4?***

$\sqrt[3]{64} : 2 = 2;\ 2 \cdot 4^2 = 32;\ 32 - 2 = 30$

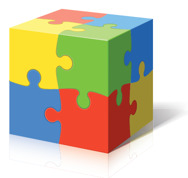
Polovica tretej odmocniny z čísla 64 je o 30 menšia ako dvojnásobok druhej mocniny čísla 4.

56 ***Žiaci mali na hodinu matematiky zostrojiť modely kociek. Klára zostrojila model s objemom 0,216 dm³. Lívia zostrojila kocku s hranou trikrát kratšou. Aký bol objem jej kocky?***

$V = a^3$ Klára: $a = \sqrt[3]{0{,}216\ dm^3} = 0{,}6\ dm$
$a = \sqrt[3]{V}$ Lívia: $a = 0{,}6\ dm : 3 = 0{,}2\ dm$
$V = (0{,}2\ dm)^2 = 0{,}008\ dm^3$

Objem Líviinej kocky bol *0,008* dm³.

57 ***Pomocou kalkulačky urči povrch kocky, ak jej objem je:***



a) V = 729 cm³
$V = 729\ cm^3$
$V = a^3$
$a = \sqrt[3]{729\ cm^3}$
$a = 9\ cm$
$S = 6 \cdot a^2$
$S = 6 \cdot (9\ cm)^2$
$S = 6 \cdot 81\ cm^2$
$S = 486\ cm^2$

b) V = 0,027 dm³
$V = 0{,}027\ dm^3$
$a = \sqrt[3]{0{,}027\ dm^3}$
$a = 0{,}3\ dm$
$S = 6 \cdot a^2$
$S = 6 \cdot (0{,}3\ dm)^2$
$S = 6 \cdot 0{,}9\ dm^2$
$S = 0{,}54\ dm^2$

OPAKOVANIE I.

1 ***Vypočítaj.***

$(-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot (-4)^2 = -8 \cdot (-1) \cdot 16 = 8 \cdot 16 = 128$

$-(-3)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-4) = -(9) - (-1) \cdot (-8) \cdot (-4) = 288$

$[(5-3)^2 - 3]^2 = (2^2 - 3)^2 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$

$[(3-4)^3 - 5]^3 = [(-1)^3 - 5]^3 = [-1-5]^3 = (-6)^3 = -216$

2 ***Vypočítaj a výsledok napíš v tvare mocniny.***

$4^2 \cdot 4^3 = 4^5$

$7^6 : 7^3 = 7^3$

$(0{,}5^2)^6 = 0{,}5^{12}$

$(-4)^8 : (-4)^5 = (-4)^3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$

$\left[\left(-\frac{7}{4}\right)^2\right]^5 = \left(-\frac{7}{4}\right)^{10}$

3 ***Zapíš čísla v tvare $a \cdot 10^n$ tak, aby platilo $n \in Z$, $1 \leq a < 10$.***

$2\,300 = 2{,}3 \cdot 10^3$

$32\,000\,000 = 3{,}2 \cdot 10^7$

$1\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^9$

$0{,}007 = 7 \cdot 10^{-3}$

$0{,}00013 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$

$0{,}0000236 = 2{,}36 \cdot 10^{-5}$

4 ***Vypočítaj.***

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{0} = 0$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt[3]{25 \cdot 36} = 30$

$\sqrt{5 \cdot 80} = 20$

$\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$

$\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$

$\sqrt{16 \cdot 9} = 12$

5 ***O koľko je druhá odmocnina zo 169 menšia ako trojnásobok druhej odmocniny zo 49?***

$3 \cdot \sqrt{49} - \sqrt{169} = 3 \cdot 7 - 13 = 21 - 13 = 8$

Druhá odmocnina zo 169 je o 8 menšia ako trojnásobok druhej odmocniny zo 49.

6 ***Plocha jednej steny kocky má 1 600 cm². Koľko litrov vody by sa do takejto kocky zmestilo?***

$S = a^2 = 1600\ cm^2$

$a = \sqrt{1600\ cm^2}$

$a = 40\ cm$

$a = 4\ dm$

$V = a^3$

$V = (4\ dm)^3$

$V = 64\ dm^3$

$V = 64\ l$

Do takejto kocky by sa zmestilo $\boxed{64}$ l vody.

OPAKOVANIE II.

1 ***Vypočítaj a výsledky porovnaj.***

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \boxed{=} \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ $\quad \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \boxed{>} \left(-\frac{1}{3}\right)^3$ $\quad \frac{1}{27} > \frac{-1}{27}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \boxed{>} \left(-\frac{1}{3}\right)^3$ $\quad \frac{1}{9} > \frac{-1}{27}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \boxed{<} \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ $\quad \frac{1}{27} < \frac{1}{9}$

2 ***Vypočítaj.***

$* = \frac{4-(25+9)}{6} = \frac{4-34}{6} = -\frac{30}{6} = -5$

$800^3 = 512\,000\,000$

$-(-2)^3 = 8$

$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$3^2 + 0{,}4^2 = 9 + 0{,}16 = 9{,}16$

$0{,}5^2 - 0{,}4^2 - 0{,}2^2 = 0{,}25 - 0{,}16 -$
$- 0{,}04 = 0{,}05$

$0^3 - (-1{,}7)^3 = 0 + 4{,}913 = 4{,}913$

$-\{-[(-2)^2]^2\}^2 = -[(-4)^2] =$
$= -(-16)^2 = -256$

$\frac{2^2 - (5^2 + 3^2)}{2 \cdot 3} = *$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{1}{54}$

3 ***Vzdialenosť hviezd od Zeme určujeme v jednotke svetelný rok. Svetelný rok je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo za jeden rok. Je to približne 9,461 · 10¹² km. Vyhľadaj na internete vzdialenosti hviezd od Zeme v svetelných rokoch a doplň tabuľku.***

NÁZOV HVIEZDY	VZDIALENOSŤ HVIEZDY OD ZEME		POLOVIČNÁ VZDIALENOSŤ HVIEZDY OD ZEME [km]
	v svetelných rokoch	v km (číslo v tvare $a \cdot 10^n$)	
Proxima Centauri	4,243	$4{,}243 \cdot 9{,}461 \cdot 10^{12} = 4{,}014 \cdot 10^{13}$	$2{,}007 \cdot 10^{13}$
Sirius	8,611	$8{,}611 \cdot 9{,}461 \cdot 10^{12} = 8{,}147 \cdot 10^{13}$	$4{,}074 \cdot 10^{13}$

4 ***Vypočítaj, pomôž si kalkulačkou.***

$\frac{\sqrt{1\,600}}{20^2} = \frac{40}{400} = \frac{1}{110}$

$\frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{0{,}16}} = \frac{0{,}5}{0{,}4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\sqrt{(12)^2} + \sqrt{900} = 12 + 30 = 42$

$\sqrt{0{,}0144} + \sqrt{400} + \sqrt{9\,000\,000} = 0{,}12 + 20 + 3\,000 =$
$= 3\,020{,}12$

$\sqrt[3]{45} \cdot \sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{45 \cdot 75} = \sqrt[3]{3375} = 15$

$\sqrt[3]{18 \cdot 12} = \sqrt[3]{216} = 6$

$\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1\,000} + 2\sqrt[3]{125} = 2 - 10 + 2 \cdot 5 = 2$

$\sqrt[3]{64} - \sqrt{64} = 4 - 8 = -4$

5 ***Vypočítaj dĺžku strany štvorca, ktorého obsah sa rovná súčtu obsahov štvorcov so stranami 20 cm, 60 cm a 90 cm. Pri výpočtoch použi kalkulačku.***

$S_1 = 20\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 400\text{ cm}^2$
$S_2 = 60\text{ cm} \cdot 60\text{ cm} = 3\,600\text{ cm}^2$
$S_3 = 90\text{ cm} \cdot 90\text{ cm} = 8\,100\text{ cm}^2$

$S = S_1 + S_2 + S_3$
$S = 400\text{ cm}^2 + 3\,600\text{ cm}^2 + 8\,100\text{ cm}^2$
$S = 12\,100\text{ cm}^2$
$S = a^2$
$a = \sqrt{S}$
$a = \sqrt{12\,100\text{ cm}^2}$
$a = 110\text{ cm}$

Dĺžka strany štvorca je $\boxed{110}$ cm.

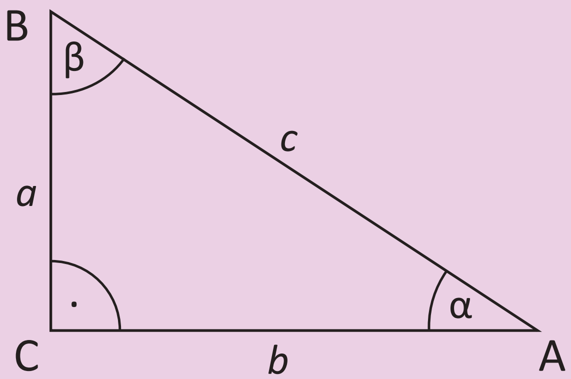
III. PYTAGOROVA VETA

Pravouhlý trojuholník

- trojuholník, ktorého jeden vnútorný uhol je pravý

Základné prvky pravouhlého trojuholníka

- odvesny: strany pravouhlého trojuholníka ktoré zvierajú pravý uhol
- prepona: najdlhšia strana trojuholníka a leží oproti pravému uhlu



Vlastnosti pravouhlého trojuholníka

- jeden z vnútorných uhlov má 90 stupňov
- súčet ostatných dvoch ostrých uhlov je tiež 90 stupňov
- pravouhlý trojuholník má dve odvesny a jednu preponu
- platí vzťah medzi odvesnami a výškami pravouhlého trojuholníka ABC s preponou c:

$$a = v_b,\ b = v_a$$

- vrchol pravého uhla vždy leží na kružnici, ktorej priemerom je prepona trojuholníka a ktorej stredom je stred prepony (Tálesova veta)

Pytagoras

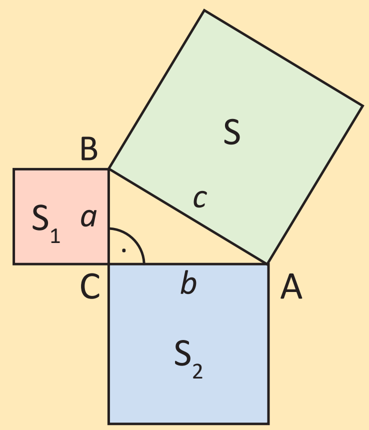
- jeden z najznámejších gréckych filozofov, žil približne v rokoch 580 – 500 pred naším letopočtom
- podľa Pytagora je podstatou všetkého číslo, jedným z jeho objavov je Pytagorova veta

Pytagorova veta

Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami.

Zápis Pytagorovej vety: $c^2 = a^2 + b^2$

- obsah štvorca nad preponou: $S = c \cdot c = c^2$
- obsah štvorca nad jednou odvesnou: $S_1 = a \cdot a = a^2$
- obsah štvorca nad druhou odvesnou: $S_2 = b \cdot b = b^2$
- obsah štvorca nad preponou: $S = S_1 + S_2$; $c^2 = a^2 + b^2$



$$S_1 + S_2 = S$$

1 ***Dané sú dĺžky 4 cm, 5 cm, 9 cm, 12 cm, 13 cm a 15 cm. Zisti, ktoré trojice dĺžok môžu byť stranami pravouhlého trojuholníka.***

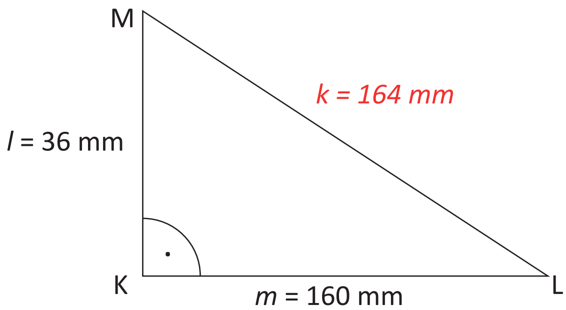
9, 12, 15 *5, 12, 13*

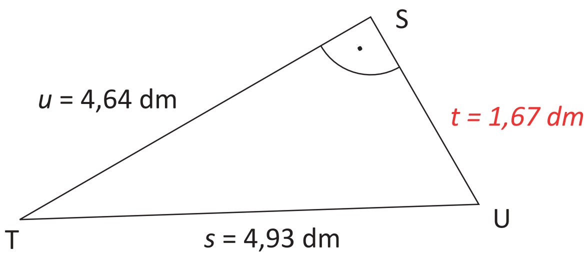
81 + 144 = 225 *25 + 144 = 169*

2 ***Doplň do tabuľky vhodné chýbajúce údaje tak, aby platila Pytagorova veta (využi druhé mocniny čísel od 1 do 20).***

a	b	c	a^2	b^2	c^2	$c^2 = a^2 + b^2$
6	*8*	10	*36*	*64*	*100*	*100 = 36 + 64*
5	*12*	13	*25*	*144*	*169*	*169 = 25 + 144*
16	*12*	*20*	256	*144*	*400*	*400 = 256 + 144*
8	*15*	17	*64*	*225*	289	*289 = 64 + 225*

3 ***Vypočítaj veľkosť tretej strany v daných trojuholníkoch.***





$k^2 = m^2 + l^2;\ k = \sqrt{m^2 + l^2};\ k = 164\ mm$

$s^2 = u^2 + t^2;\ t = \sqrt{s^2 - u^2};\ t = 1,67\ dm$

4 ***V pravouhlom trojuholníku KLM s pravým uhlom pri vrchole M, je daná odvesna k = 8 cm a prepona m = 15 cm. Vypočítaj dĺžku druhej odvesny l (zaokrúhli na 2 desatinné miesta).***

$m^2 = k^2 + l^2$

$l = \sqrt{m^2 - k^2}$

$l = \sqrt{(15\ cm)^2 - (8\ cm)^2}$

$l = \sqrt{(225\ cm)^2 - (8\ cm)^2}$

$l = \sqrt{161\ cm^2}$

$l = 12,69\ cm$

5 ***Do nasledujúcej tabuľky doplň dvojicu čísel*** *x, y* ***za predpokladu, že*** *x > y*. ***Dĺžky strán trojuholníka ABC vypočítaj podľa vzťahu uvedeného pri danej strane. Zisti, či trojuholníky s takýmito dĺžkami strán sú pravouhlé.*** *samostatná / skupinová / spoločná práca žiakov*

príklady možných riešení

x	y	$a = x^2 - y^2$	$b = 2xy$	$c = x^2 + y^2$	JE TROJUHOLNÍK PRAVOUHLÝ?
5	4	9	40	41	áno (81 + 1600 = 1681)
7	3	40	42	58	áno (1600 + 1764 = 3364)
2	1	3	4	5	áno (9 + 16 = 25)
3	2	5	12	13	áno (25 + 144 = 169)
4	2	12	16	20	áno (144 + 256 = 400)

6 ***Daný zápis predstavuje výpočet výšky trojuholníka STU. Vypočítaj jeho výšku s danými hodnotami. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta).***

$$v = \sqrt{t^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2} = \sqrt{8,5^2 - \left(\frac{8,5}{2}\right)^2} = \sqrt{72,25 - 18,0635} = \sqrt{54,1875} = 7,36$$

v = 7,36

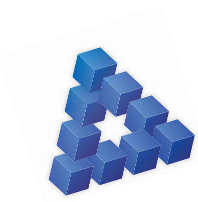
Výška trojuholníka STU je 7,36.

7 ***Vypočítaj výšku v rovnoramennom trojuholníku KLM, ak ramená majú dĺžku 4,8 cm a dĺžka základne je 6,5 cm. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***

m = 6,5 cm; k = l = 4,8 cm; v = ?

$$v = \sqrt{l^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{23,04 - 10,5625} = \sqrt{12,4775} = 3,53$$

v = 3,53 cm



Výška v rovnoramennom trojuholníku KLM je 3,53 cm.

8 ***Vypočítaj dĺžku ramena v rovnoramennom trojuholníku PQR, ak výška na základňu je 1,2 dm a dĺžka základne je 32 cm.***

r = 32 cm; v = 1,2 dm = 12 cm

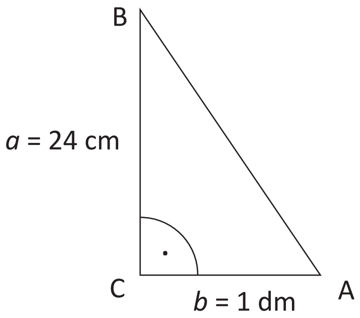
p = q =?

$$p = \sqrt{v^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

p = 20 cm = 2 dm

Dĺžka ramena v rovnoramennom trojuholníku PQR je 2 dm.

9 **Urči obvod trojuholníka na obrázku v centimetroch.**



$a = 24$ cm
$b = 1$ dm $= 10$ cm
$o = ?$
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad c = 26$ cm
$o = a + b + c$
$o = 24$ cm $+ 10$ cm $+ 26$ cm
$o = 60$ cm

Obvod trojuholníka ABC je 60 cm.

10 **Vypočítaj dĺžku ramena rovnoramenného trojuholníka, ktorého základňa má dĺžku 10 cm a obsah tohto trojuholníka je 60 cm².**

A) 10 cm B) 11 cm C) 12 cm *D) 13 cm*

$c = 10$ cm; $a = b = ?$; $S = 60$ cm²

$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$; $v_c = 2 \cdot S : c = (2 \cdot 60\ \text{cm}^2) : 10\ \text{cm} = 120\ \text{cm}^2 : 10\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$

$a = \sqrt{v_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{144\ \text{cm}^2 + 25\ \text{cm}^2} = \sqrt{169\ \text{cm}^2} = 13\ \text{cm}$ *Dĺžka ramena trojuholníka je 13 cm.*

11 **Aký obsah má rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany 14,5 cm?**

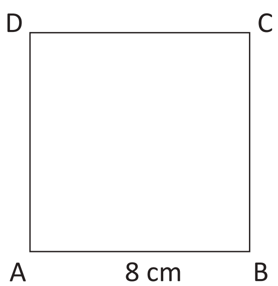
$a = b = c = 14{,}5$ cm; $S = ?$

$v_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{14{,}5^2 - 7{,}25^2} = \sqrt{210{,}25 - 52{,}5625} = \sqrt{157{,}6875} = 12{,}56\ ;\ v_c = 12{,}56\ \text{cm}$

$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{14{,}5\ \text{cm} \cdot 12{,}56\ \text{cm}}{2} = \frac{182{,}12\text{cm}^2}{2} = 91{,}06\ \text{cm}^2$

Obsah rovnostranného trojuholníka je 91,06 cm².

12 **Vypočítaj veľkosť uhlopriečky štvorca na obrázku (zaokrúhli na 2 desatinné miesta).**



$a = 8$ cm
$e = ?$
$e = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2}$
$e = \sqrt{2 \cdot 8^2}$
$e = \sqrt{2 \cdot 64}$
$e = \sqrt{128}$
$e = 11{,}31$

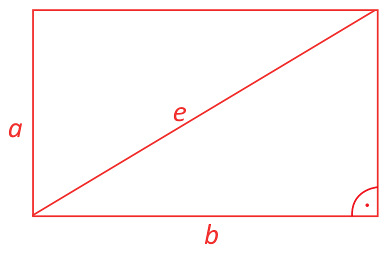
Uhlopriečka štvorca má dĺžku 11,31 cm.

13 ***V obdĺžniku je daná uhlopriečka, ktorej dĺžka je 88 dm a jeho jedna strana s dĺžkou 4,5 m. Vypočítaj veľkosť druhej strany.***

e = 88 dm; a = 4,5m = 45 dm; b = ?

$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{88^2 - 45^2} = \sqrt{7\,744 - 2\,025} = \sqrt{5719} = 75,62$

b = 75,6 dm



Dĺžka druhej strany obdĺžnika je 75,6 dm.

14 ***Vypočítaj veľkosť uhlopriečky štvorca ABCD, ak vieš, že obsah štvorca je 49 cm². (Výsledok zaokrúhli na celé číslo.)***

S = 49 cm²; |AC| = |BD| = e = ?

$a = \sqrt{S} = 7$ *cm;*

$e = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98} = 9,89 \doteq 10$

|AC| = |BD| = 10 cm

Veľkosť uhlopriečky štvorca ABCD je 10 cm.

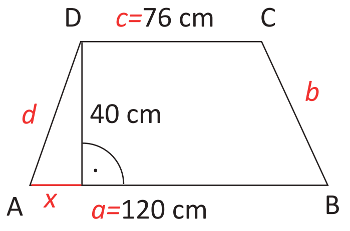
15 ***Daný zápis predstavuje výpočet výšky rovnoramenného lichobežníka. Vypočítaj jeho výšku s danými hodnotami. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta).***

$$v = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{18-12}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5,196$$

$v \doteq 5,2$

Veľkosť výšky v rovnoramennom lichobežníku je 5,2.

16 ***Vypočítaj dĺžku ramien v rovnoramennom lichobežníku na obrázku. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***



a = 120 cm
c = 76 cm
v = 40 cm
b = d = ?
x = (120 cm – 76 cm) : 2
x = 44 cm : 2
x = 22 cm

$b = d = \sqrt{(22\text{ cm})^2 + (40\text{ cm})^2}$

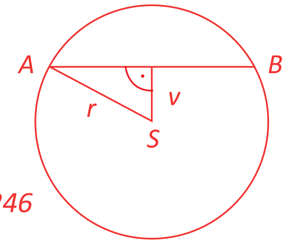
$b = d = \sqrt{484\text{ cm}^2 + 1600\text{ cm}^2}$

$b = d = \sqrt{2084\text{ cm}^2}$

$b = d = 45,65$ *cm*

Dĺžka ramien v rovnoramennom lichobežníku ABCD je 45,65 cm.

17 ***Dĺžka tetivy v kružnici |AB| = 7,5 cm. Vypočítaj vzdialenosť tetivy AB od stredu kružnice, ak polomer kružnice r = 5,8 cm. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***



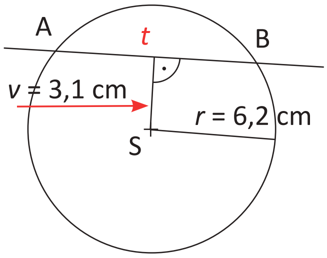
r = 5,8 cm
|AB| = 7,5 cm – dĺžka tetivy
v = ?

$$v = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{5,8^2 - 3,75^2} = \sqrt{33,646 - 14,0625} = \sqrt{19,5775} = 4,4246$$

v ≐ 4,42 cm

Vzdialenosť tetivy AB od stredu kružnice je 4,42 cm.

18 ***Vypočítaj dĺžku tetivy AB v kružnici na obrázku, ak v je vzdialenosť tetivy AB od stredu S. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***



r = 6,2 cm
v = 3,1cm
t = ?

$$r^2 = v^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2$$
$$\frac{t}{2} = \sqrt{r^2 - v^2}$$
$$t = 2 \cdot \sqrt{(6,2\ cm)^2 - (3,1\ cm)^2}$$
$$t = 2 \cdot \sqrt{38,44\ cm^2 - 9,61\ cm^2}$$
$$t = 2 \cdot \sqrt{28,83\ cm^2}$$
$$t = 2 \cdot 5,369\ cm$$
$$t = 10,738\ cm$$
$$t \doteq 10,74cm$$

Dĺžka tetivy AB je 10,74 cm.

19 ***Vypočítaj polomer kružnice, ak vieš, že tetiva s dĺžkou 5,7 cm je vzdialená od stredu kružnice 2,8 cm. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***

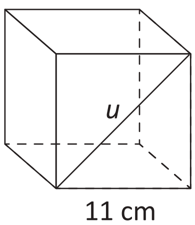
|AB| = 5,7 cm – dĺžka tetivy
d = 2,8 cm
r = ?

$$r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,8\ cm)^2 + (2,85\ cm)^2} = \sqrt{7,84\ cm^2 + 8,1225\ cm^2} = \sqrt{15,9625\ cm^2} = 3,995\ cm$$

r ≐ 4 cm

Polomer kružnice je približne 4 cm.

20 ***Akú dĺžku má stenová uhlopriečka kocky na obrázku? (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***



$$u^2 = a^2 + a^2$$
$$u^2 = 2 \cdot a^2$$
$$u = \sqrt{2 \cdot (11\ cm)^2}$$
$$u = 2 \cdot \sqrt{121\ cm^2}$$
$$u = \sqrt{242\ cm^2}$$
$$u = 15,556\ cm$$
$$u \doteq 15,56\ cm$$

Dĺžka stenovej uhlopriečky je 15,56 cm.

21 ***Akú veľkosť má hrana kocky, ak vieš, že jej stenová uhlopriečka má veľkosť 15 cm? (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.)***

$u_s = 15\ cm$
$a = ?$

$$a = \sqrt{\frac{u_s^{\,2}}{2}} = \sqrt{(15\ cm)^2 : 2} = \sqrt{225\ cm^2 : 2} = \sqrt{112,5\ cm^2} = 10,606\ cm$$

$a \doteq 10,61\ cm$
Hrana kocky má veľkosť 10,61 cm.

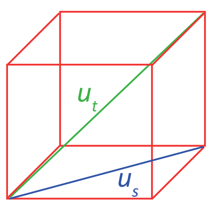
22 ***Daný zápis predstavuje výpočet stenovej uhlopriečky pravidelného štvorbokého hranola. Vypočítaj jeho uhlopriečku s danými hodnotami. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta).***

$$u_s = \sqrt{a^2 + v^2} = \sqrt{18^2 + 13^2} = \sqrt{324 + 169} = \sqrt{493} = 22,203$$

$u_s \doteq 22,2$

Dĺžka stenovej uhlopriečky je 22,2.

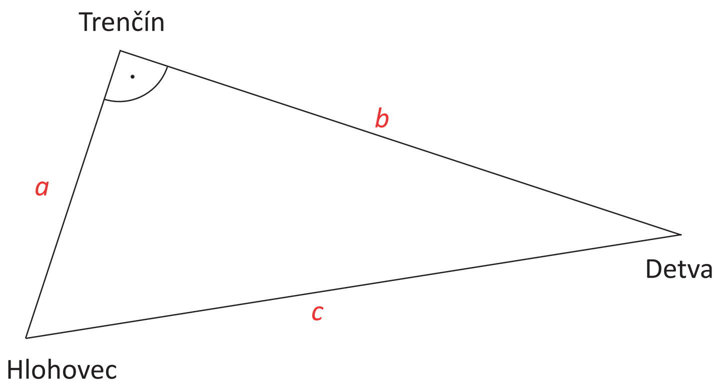
23 ***Akú dĺžku má telesová uhlopriečka v kocke s hranou 2,3 dm?***



$a = 2,3\ dm$
$u_s = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2.(2,3\ dm)^2} = \sqrt{2 \cdot 5,29\ dm^2} = \sqrt{10,58\ dm^2} = 3,25\ dm$
$u_t = \sqrt{u_s^2 + a^2} = \sqrt{(3,25\ dm)^2 + (2,3\ dm)^2} = \sqrt{10,5625\ dm^2 + 5,29\ dm^2} =$
$= \sqrt{15,8525\ dm^2} = 3,9815\ dm$
$u_t \doteq 3,98\ dm$

Dĺžka telesovej uhlopriečky je 3,98 dm.

24 ***Vzdušná vzdialenosť Trenčín – Detva je 111 km. Vzdušná vzdialenosť Hlohovec - Trenčín je 57 km. Aká je vzdušná vzdialenosť Detva – Hlohovec? (Zaokrúhli na celé číslo).***

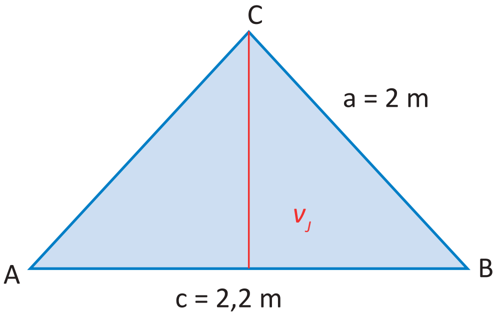


$a = 57\ km$
$b = 111\ km$
$c = ?$
$c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{(57\ km)^2 + (111\ km)^2}$
$c = \sqrt{3\,249\ km^2 + 12\,321\ km^2}$
$c = \sqrt{15\,570\ km^2}$
$c = 124,779\ km$
$c \doteq 125\ km$

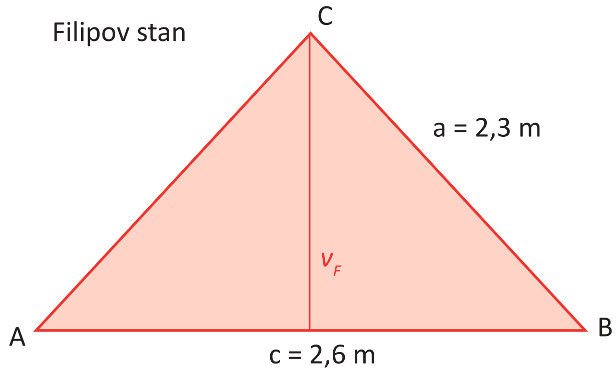
Vzdušná vzdialenosť Detva – Hlohovec je $\boxed{125}$ km.

25 ***Ján a Filip sa vybrali stanovať. Obaja mali stany s prierezom v tvare rovnoramenného trojuholníka. Mohli sa obaja vo svojich stanoch postaviť, ak Ján meria 178 cm a Filip meria 181 cm?***

Jánov stan



Filipov stan

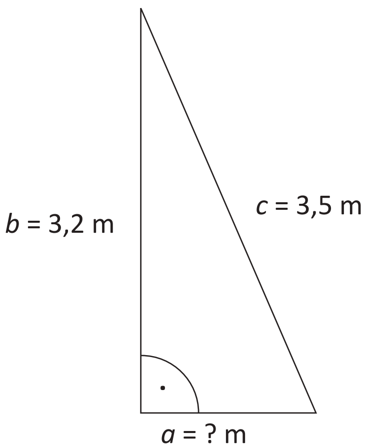


Výška Jánovho stanu: $v_J = \sqrt{(2\ m)^2 - (1,1\ m)^2} = \sqrt{4\ m^2 - 1,21\ m^2} = \sqrt{2,79\ m^2} = 1,67\ m = 167\ cm$

Výška Filipovho stanu: $v_F = \sqrt{(2,3\ m)^2 - (1,3\ m)^2} = \sqrt{5,29\ m^2 - 1,69\ m^2} = \sqrt{3,6\ m^2} = 1,897\ m = 189,7\ cm$

Vo svojom stane sa mohol postaviť *Filip*.

26 ***Matúš chce vo výške 3,2 m priskrutkovať chýbajúcu skrutku. V akej vzdialenosti od steny si musí postaviť rebrík, ktorého dĺžka je 3,5 m?***



$b = 3,2\ m$
$c = 3,5\ m$
$a = ?$

$a^2 + b^2 = c^2$
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
$a = \sqrt{(3,5\ m)^2 - (3,2\ m)^2}$
$a = \sqrt{12,25\ m^2 - 10,24\ m^2}$
$a = \sqrt{2,01\ m^2}$
$a = 1,417\ m$
$a \doteq 1,42\ m$

A) *1,42 m* B) 3,66 m C) 1,41 m D) 4,74 m

Matúš si musí postaviť rebrík spodnou časťou vo vzdialenosti 1,42 m od steny.

27 **Vypočítaj.**

a) Do akej výšky siaha dvojitý rebrík dlhý 5 m, ak sú päty rebríka od seba vzdialené 2 m?

$a = b = 5\ m;\ c = 2\ m;\ v = ?\ v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(5\ m)^2 - (1\ m)^2} = \sqrt{25\ m^2 - 1\ m^2} = \sqrt{24\ m^2} = 4,89m$

Rebrík siaha do výšky *4,9* m.

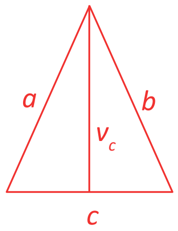
b) Ako musíš roztvoriť rebrík, aby dosahoval do výšky 4,6 m?

$a = b = 5\ m;\ v = 4,6\ m;\ c = ?;\ \frac{c}{2} = \sqrt{a^2 - v^2} = \sqrt{(5\ m)^2 - (4,6\ m)^2} = \sqrt{25\ m^2 - 21,16\ m^2} = \sqrt{3,84\ m^2} = 1,959\ m$

$c = 2 \cdot 1,959\ m = 3,919\ m \doteq 3,92\ m$

Päty rebríka musia byť od seba vzdialené *3,92* m.

28 ***Kvetinový záhon má tvar rovnoramenného trojuholníka so základňou 25 m a ramenami 30 m dlhými. Vypočítaj, najviac koľko kvetov môžeme na tento záhon vysadiť, ak predpokladáme, že jeden kvet potrebuje asi 8 dm² plochy. Výsledok zaokrúhli na desiatky.***



$a = b = 30\ m;\ c = 25\ m;\ v_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(30\ m)^2 - (12,5\ m)^2} = \sqrt{900\ m^2 - 156,25\ m^2} =$

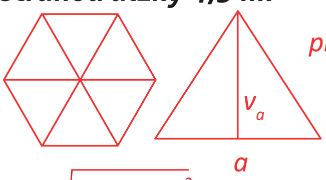
$= \sqrt{743,75\ m^2} = 27,27\ m$

$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ $\quad S = 340,875\ m^2 = 34\ 087,5\ dm^2$

kvety: $34\ 087,5\ dm^2 : 8\ dm^2 = 4\ 260$

Na tento záhon môžeme vysadiť najviac *4 260* kvetov.

29 ***Vypočítaj v m² rozlohu záhradného altánku, ktorého pôdorys má tvar pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky 4,5 m.***



pravidelný šesťuholník = 6 · rovnostranný trojuholník; jeden trojuholník: a = b = c = 4,5 m

$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(4,5\ m)^2 - (2,25\ m)^2} = \sqrt{20,25\ m^2 - 5,0625\ m^2} = \sqrt{15,1875\ m^2} = 3,879\ m \doteq 3,9\ m$

rozloha záhradného altánku : $S = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 3 \cdot 4,5\ m \cdot 3,9\ m = 52,65\ m^2$

Rozloha záhradného altánku je *52,65* m².

30 ***Lukášovi rodičia sa rozhodli pre nový televízor. Vedia, aký rozmer potrebujú. Pomôž im vypočítať, akú veľkú uhlopriečku si majú v obchode vybrať, ak priestor, v ktorom chcú mať obrazovku, má šírku 90 cm a výšku 55 cm a chcú ho takmer celý vyplniť. (Pozn. Do úvahy nebudeme brať rám a stojan televízora).***

UHLOPRIEČKA	
palcov	cm
32	81
37	94
40	102
42	107
46	117
47	119
50	127
52	132
55	140
58	147
60	152

$a = 90\ cm$

$b = 55\ cm$

$u = ?$

$u = \sqrt{a^2 + b^2}$

$u = \sqrt{(90\ cm)^2 + (55\ cm)^2}$

$u = \sqrt{8100\ cm^2 + 3025\ cm^2}$

$u = \sqrt{11\ 125\ cm^2}$

$u = 105,475\ cm$

$u \doteq 105\ cm$

Lukášovi rodičia by si mohli vybrať obrazovku s uhlopriečkou *37* palcov = *94* cm alebo *40* palcov = *102* cm.

31 ***V ktorej z týchto dvoch záhrad tvaru obdĺžnika bude dlhší chodník, ktorý sa nachádza na mieste uhlopriečky v každej záhrade?***

1. záhrada: 30 m × 50 m
2. záhrada: 45 m × 45 m

Chodník v 1. záhrade: u_1

$u_1 = \sqrt{(30\ m)^2 + (50\ m)^2}$
$u_1 = \sqrt{900\ m^2 + 2500\ m^2}$
$u_1 = \sqrt{3400\ m^2}$
$u_1 = 58,31\ m$

Chodník v 2. záhrade: u_2

$u_2 = \sqrt{2. \cdot (45m)^2}$
$u_2 = \sqrt{2 \cdot 2025\ m^2}$
$u_2 = \sqrt{4050\ m^2}$
$u_2 = 63,64\ m$

Chodník bude dlhší v *2.* záhrade.

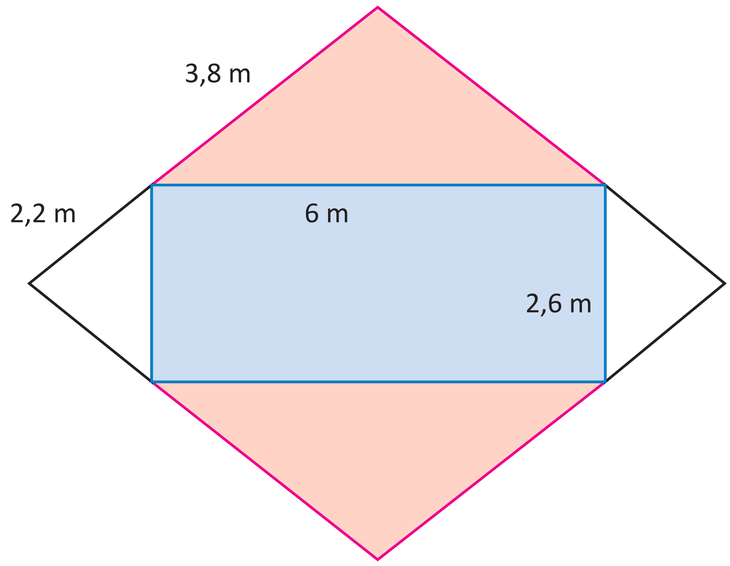
32 ***Akú výmeru v m² má obdĺžniková záhrada, ktorej uhlopriečka má dĺžku 50 m a šírka záhrady je 27 m? Výsledok zaokrúhli na celé číslo.***

u = 50 m; b = 27 m; a = ? $a = \sqrt{u^2 - b^2} = \sqrt{(50\ m)^2 - (27\ m)^2} = \sqrt{2500\ m^2 - 729\ m^2} = \sqrt{1771\ m^2} = 42,08\ m$

A) 1 134 m² B) 1 534 m² *C) 1 136 m²* D) 1 512 m²

$S = a \cdot b = 42,08\ m \cdot 27\ m = 1\,136,16\ m^2 \doteq 1\,136\ m^2$

33 ***Vypočítaj, koľko m² farebných papierov sa spotrebuje na vytvorenie útvaru znázorneného na obrázku (trojuholníky na obrázku sú rovnoramenné).***



modrý obdĺžnik:
$S = 6\ m \cdot 2,6\ m = 15,6\ m^2$

červené trojuholníky:
$v = \sqrt{(3,8m)^2 - (3m)^2} = \sqrt{14,44\ m^2 - 9m^2} =$
$= \sqrt{5,44m^2} = 2,33\ m$
$S = 2 \cdot 6\ m \cdot 2,33\ m : 2 = 13,98\ m^2$

biele trojuholníky:
$v = \sqrt{(2,2\ m)^2 - (1,3\ m)^2} = \sqrt{4,84\ m^2 - 1,69\ m^2} =$
$= \sqrt{3,15\ m^2} = 1,77\ m$
$S = 2 \cdot 2,6\ m \cdot 1,77\ m : 2 = 4,602\ m^2$

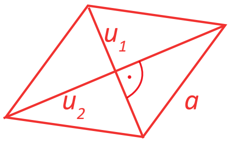
Na vytvorenie takého útvaru sa spotrebuje *13,98* m² červeného, *15,6* m² modrého a *4,602* m² bieleho papiera.

34 ***Vypočítaj obvod kosoštvorca, ak jeho uhlopriečky majú dĺžky 1,4 dm a 4,8 dm.***

$u_1 = 1{,}4\ dm;\ u_2 = 4{,}8\ dm;\ o = ?;\ u_1 \perp u_2;\ a = \sqrt{(0{,}7\ dm)^2 + (2{,}4\ dm)^2} = \sqrt{0{,}49\ dm^2 + 5{,}76\ dm^2} =$

$= \sqrt{6{,}25\ dm^2} = 2{,}5\ dm$

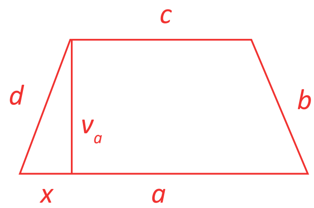
$o = 4 \cdot a = 4 \cdot 2{,}5\ dm = 10\ dm$



Obvod kosoštvorca je 10 dm.

35 ***Pozemok tvaru rovnoramenného lichobežníka má základne dlhé 81 m, 76 m a výšku 12 m. Vypočítaj, koľko € zaplatíme za oplotenie pozemku, ak 1 m pletiva stojí 1,20 € (zaokrúhli na celé €). Šírka brány je 3 m.***

$a = 81\ m;\ c = 76\ m;\ v = 12\ m;\ o = ?$ $\qquad x = (a - c) : 2 = (81\ m - 76\ m) : 2 = 2{,}5\ m$



$b = d = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 12^2} = \sqrt{6{,}25 + 144} = \sqrt{150{,}25} = 12{,}257 \doteq 12{,}26$

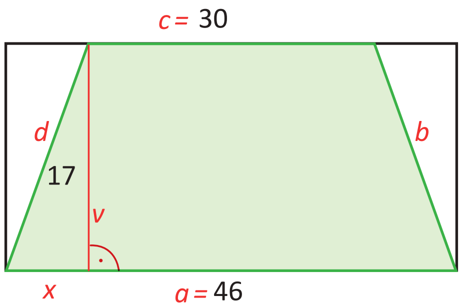
$o = a + 2b + c = 81\ m + 2 \cdot 12{,}26\ m + 76\ m = 181{,}52\ m$

oplotenie... $181{,}52\ m - 3\ m = 178{,}52\ m$

cena... $171{,}52\ m \cdot 1{,}20 \frac{€}{m} = 214{,}224\ € = 214\ €$

Za pletivo zaplatíme $\boxed{214}$ €.

36 ***Vypočítaj, akú časť plochy v % zaberá rovnoramenný lichobežník v danom obdĺžniku, ak rozmery lichobežníka sú uvedené na obrázku (v mm).***



obdĺžnik: $a = 46\ mm$

lichobežník: $a = 46\ mm$

$c = 30\ mm$

$b = d = 17\ mm$

$S_1 = ?$

$v = ? \qquad x = (a - c) : 2 = (46 - 30) : 2 = 16 : 2 = 8$

$v = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$

obsah obdĺžnika

$S = 46\ mm \cdot 15\ mm = 690\ mm^2$

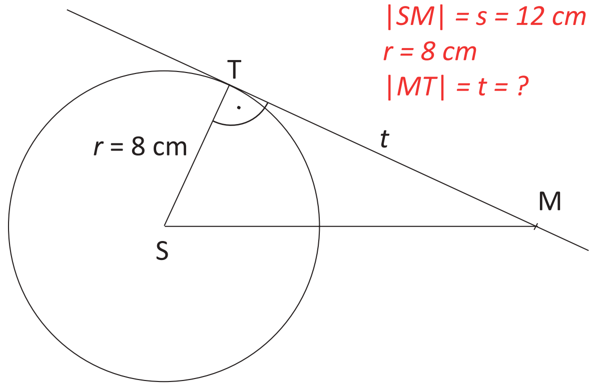
obsah lichobežníka

$S^* = [(46\ mm + 30\ mm) \cdot 15\ mm] : 2 = 1\,140\ mm^2 = 570\ mm^2$

$S^* : S = (570\ mm^2 : 690\ mm^2) \cdot 100\ \% = 82{,}61\%$

Lichobežník zaberá približne $\boxed{82{,}61}$ % plochy obdĺžnika.

37 ***Urči vzdialenosť bodov MT na dotyčnici ku kružnici, ak |SM| = 12 cm a polomer kružnice r = 8 cm.***



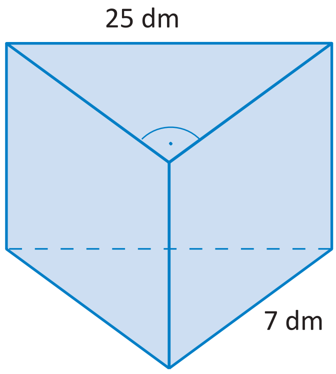
$|SM| = s = 12$ cm
$r = 8$ cm
$|MT| = t = ?$

$$t = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80} \doteq 8,94$$

$$t = |MT| \doteq 8,94 \text{ cm}$$

Vzdialenosť bodov MT je 8,94 cm.

38 ***Vypočítaj objem trojbokého hranola s podstavou pravouhlého trojuholníka, ak prepona podstavného trojuholníka má 25 dm, jedna odvesna má 7 dm a výška hranola je 5,5 dm.***



$a = 7$ dm
$b = ?$
$c = 25$ dm
$v_h = 5,5$ dm
$v_h = 5,5$ dm

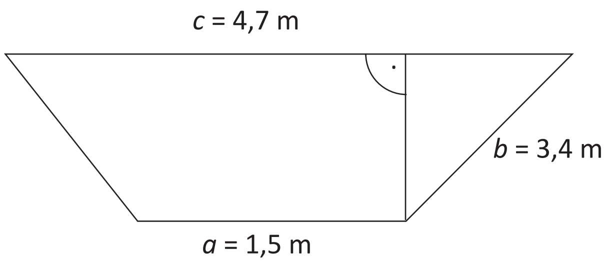
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = (25 \text{ dm})^2 - (7 \text{ dm})^2 = \sqrt{625 \text{ dm}^2 - 49 \text{ dm}^2} =$$
$$= \sqrt{576 \text{ dm}^2} = 24 \text{ dm}$$

$$S_p = (24 \text{ dm} \cdot 7 \text{ dm}) : 2 = 168 \text{ dm}^2 = 84 \text{ dm}^2$$

$$V = S_p \cdot v_h = 84 \text{ dm}^2 \cdot 5,5 \text{ dm} = 462 \text{ dm}^3$$

Objem trojbokého hranola je 462 dm³.

39 ***Robotníci pri výkopových prácach vykopali kanál dlhý 650 m, ktorý mal v priereze tvar rovnoramenného lichobežníka s rozmermi uvedenými na obrázku. Vypočítaj, koľko m³ zeminy vykopali robotníci pri hĺbení kanála.***



$a = 1,5$ m; $b = d = 3,4$ m; $c = 4,7$ m; $v = 650$ m
$V = ?$
výška podstavy (lichobežníka)

$$v_p = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2} = \sqrt{3,4^2 - 1,6^2} = 3$$

$v_p = 3$ m

objem: $V = S_p \cdot v$

$$V = \frac{(a+c) \cdot v_p}{2} \cdot v = \frac{6,2 \cdot 3}{2} \cdot 650 = 9,3 \cdot 650 = 6\,045$$

$V = 6\,045 \text{ m}^3$

Robotníci vykopali $\boxed{6\,045}$ m³ zeminy.

OPAKOVANIE I.

1 ***Zisti, ktorý z týchto dvoch trojuholníkov je pravouhlý.***

Δ KLM: l = 2,8 dm
k = 2,3 dm
m = 3,8 dm

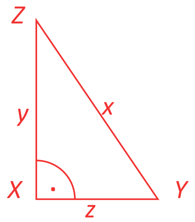
Δ KLM: $m^2 = l^2 + k^2$
$3{,}8^2 = 2{,}8^2 + 2{,}3^2$
$14{,}44 = 7{,}84 + 5{,}29$
$14{,}44 \neq 13{,}13$

Δ EFG: e = 0,16 m
f = 0,3 m
g = 0,34 m

Δ EFG: $g^2 = e^2 + f^2$
$0{,}34^2 = 0{,}16^2 + 0{,}3^2$
$0{,}1156 = 0{,}0256 + 0{,}09$
$0{,}1156 = 0{,}1156$

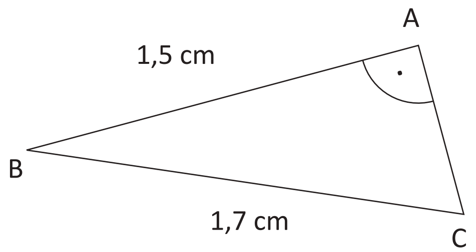
Pravouhlý je trojuholník *EFG*.

2 ***V pravouhlom trojuholníku XYZ s pravým uhlom pri vrchole X sú dané strany x = 52 cm a strana z = 20 cm. Vypočítaj veľkosť strany y.***



x = 52 cm – prepona
z = 20 cm – odvesna
y = ?
$y = \sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{52^2 - 20^2} = \sqrt{2\,704 - 400} = \sqrt{2304} = 48$
y = 48 cm
Veľkosť strany y je 48 cm.

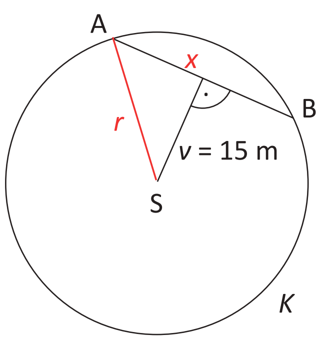
3 ***Na mape s mierkou 1 : 2 500 000 sú uvedené vzdialenosti medzi mestami v cm. Vypočítaj skutočnú vzdialenosť medzi mestami A a C.***



c = 1,5 cm; a = 1,7 cm; b = ? $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
$b = \sqrt{1{,}7^2 - 1{,}5^2}$
b = 0,8 cm – na mape
Skutočná vzdialenosť: 0,8 cm · 2 500 000 =
= 2 000 000 cm = 20 km

Vzdialenosť medzi mestami A a C je *20* km.

4 ***Vypočítaj dĺžku chodníka AB, ktorý vedie cez kruhové námestie s priemerom 40 m, ak chodník je vzdialený od stredu námestia v = 15 m.***

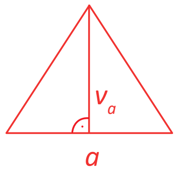


priemer: d = 40 m, polomer: r = 20 m
vzdialenosť chodníka od stredu: v = 15 m
dĺžka chodníka: x = ?
$x = 2 \cdot \sqrt{r^2 - v^2}$
$x = 2 \cdot \sqrt{20^2 - 15^2}$
$x = 2 \cdot \sqrt{400 - 225}$
$x = 2 \cdot \sqrt{175}$
$x = 2 \cdot 13{,}23$
$x = 26{,}46$
$x \doteq 26{,}5 m$

Dĺžka chodníka je približne *26,5* m.

5 ***Vypočítaj objem pravidelného trojbokého hranola s podstavnou hranou dĺžky 8 cm a výškou hranola 17 cm.***

a = 8 cm; v = 17 cm; V = ?



$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$v_a = \sqrt{8^2 - 4^2}$

$v_a = 6{,}93$ cm – výška podstavy

Objem: $V = S_p \cdot v$

$V = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v$

$V = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 17$

$V = 471{,}24\ cm^3$

Objem pravidelného trojbokého hranola je $\boxed{471{,}24}$ cm³.

6 ***Vypočítaj dĺžku stenovej a telesovej uhlopriečky kocky s hranou dĺžky 6 cm.***

a = 6 cm; u_s = ?; u_t = ?

$u_s^2 = a^2 + a^2$

$u_s^2 = 2 \cdot a^2$

$u_s^2 = 2 \cdot 36$

$u_s^2 = 72$

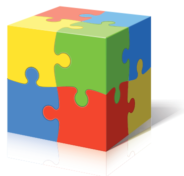
$u_s = \sqrt{72}$

$u_s = 8{,}49$ cm

$u_t^2 = u_s^2 + a^2$

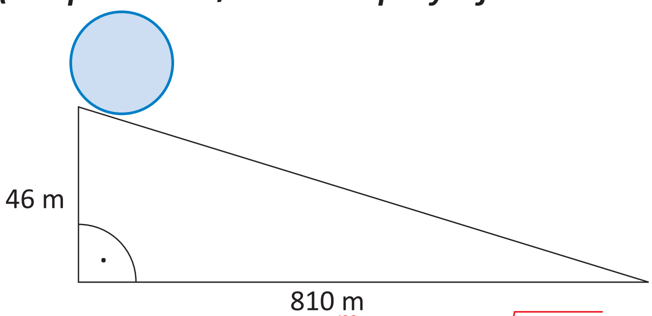
$u_t = \sqrt{72 + 36}$

$u_t = 10{,}39$ cm



Dĺžka stenovej uhlopriečky je 8,49 cm a telesovej uhlopriečky 10,39 cm.

7 ***Za približne aký čas sa skotúľa valec po plošine na obrázku, ak jeho rýchlosť je 2,5 m/s? (Predpokladáme, že valec sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom.)***



$a = 810\ m;\ b = 46\ m;\ v = 2{,}5\ \frac{m}{s};\ t = ?\quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 811{,}3\ m = s;\ s = v \cdot t$

$t = s : v = 811{,}3\ m : 2{,}5\ \frac{m}{s} = 324{,}5\ s \doteq 325\ s$

Valec sa po plošine skotúľa približne za $\boxed{325}$ sekúnd.

8 ***Pani Milena chce na schody položiť koberec. Odmerala iba vzdialenosť, ktorú vidíš na obrázku. Aký dlhý koberec potrebuje pani Milena, aby pokryl všetky schody a k tomu 30 centimetrov na oba konce?***

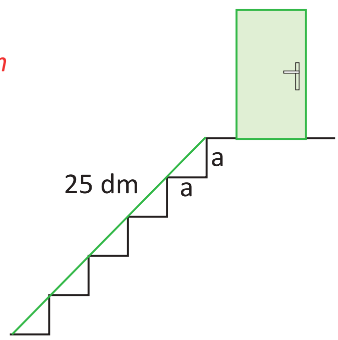
Zoberieme si jeden trojuholník s rozmermi prepony c = 25 dm : 5 = 5 dm a odvesnami dĺžky a, potom $c^2 = a^2 + a^2$

$5^2 = 2 \cdot a^2;\ a = \sqrt{\frac{25}{2}}$

a = 3,54 dm – dĺžka jednej odvesny trojuholníka

10 · a = 10 · 3,54 dm = 35,4 dm

Koberec: 35,4 dm + 2 · 30 cm = 35,4 dm + 6 dm = 41,4 dm



Pani Milena potrebuje koberec dlhý $\boxed{41{,}4}$ dm.

OPAKOVANIE II.

1 ***Daný je pravouhlý trojuholník PQR s odvesnami q, r a preponou p. Vypočítaj tretiu stranu trojuholníka.***

a) p = 16 cm; r = 7 cm

q = ? – odvesna; $q = \sqrt{p^2 - r^2} = \sqrt{16^2 - 7^2} = \sqrt{256 - 49} = \sqrt{207} \doteq 14{,}39$ *q = 14,39 cm*

b) q = 24 dm; r = 1,3 m

r = 1,3 m = 13 dm; p = ? – prepona; $p = \sqrt{q^2 + r^2} = \sqrt{24^2 + 13^2} = \sqrt{576 + 169} = \sqrt{745} \doteq 27{,}29$

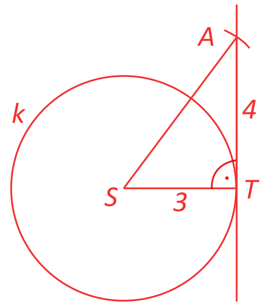
p = 27,29 dm

2 ***Dotyčnica t vedená z bodu A ku kružnici k (S; 3 cm) má bod dotyku T. Vypočítaj veľkosť úsečky AS, ak |AT| = 4 cm.***

r = 3 cm; |AT| = 4 cm; |AS| = ? $|AS| = \sqrt{r^2 + |AT|^2}$

$|AS| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

|AS| = 5 cm



Veľkosť úsečky AS je $\boxed{5}$ cm.

3 ***Pomer strán v Δ ABC je 2 : 4 : 9. Najkratšia strana má dĺžku 18 cm. Vypočítaj dĺžky ostatných strán a zisti, či je Δ ABC pravouhlý.***

a : b : c = 2 : 4 : 9; a = 2x = 18 cm – najkratšia strana; b = 4x; c = 9x

2x = 18; x = 9; dĺžky ostatných strán: b = 4x = 4 · 9 = 36; c = 9x = 9 · 9 = 81

podľa Pytagorovej vety: $c^2 = a^2 + b^2$ *a = 18 cm*

$81^2 = 18^2 + 36^2$ *b = 36 cm*

$6\,561 = 324 + 1\,296$ *c = 81 cm*

$6\,561 \neq 1\,620$ *– daný trojuholník nie je pravouhlý*

Dĺžky ostatných strán sú 36 cm a 81 cm.

Daný trojuholník $\boxed{\text{nie je}}$ pravouhlý.

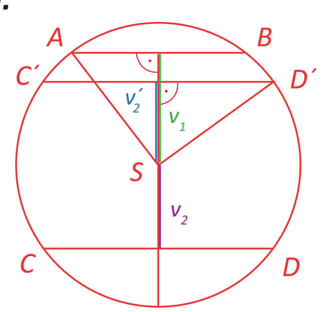
4 ***Úsečky AB, CD sú dve rovnobežné tetivy kružnice, ktorá má polomer 15 cm. Urči vzdialenosť tetív AB a CD, ak vieme, že |AB| = 18 cm a |CD| = 24 cm.***

r = 15 cm; |AB| = 18 cm a |CD| = 24 cm; v = ?

$v_1 = |S, AB| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}$ $v_2 = |S, CD| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2}$

$v_1 = |S, AB| = \sqrt{15^2 - 9^2}$ $v_2 = |S, CD| = \sqrt{15^2 - 12^2}$;

$v_1 = |S, AB| = 12$ cm $v_2 = |S, CD| = 9$ cm



$v = v_1 + v_2$; $v = 12$ cm $+ 9$ cm $= 21$ cm

Vzdialenosť tetív AB a CD je $\boxed{21}$ cm.

(Úloha má dve riešenia. Tetiva CD môže byť aj v rovnakej polovici kruhu ako AB, označme ju C´D´, potom $v' = v_1 - v_2 = 12$ cm $- 9$ cm $= 3$ cm.*)*

5 **Urči obvod pravouhlého trojuholníka, ak dĺžka jednej odvesny je 75 % dĺžky druhej odvesny a jeho obsah je 24 cm².**

odvesny: a; $b = 0{,}75 \cdot a$; prepona c; obsah: $S = 24\ cm^2$; obvod: $o = ?$

$S = \frac{a \cdot b}{2}$

$S = \frac{a \cdot 0{,}75 \cdot a}{2}$

$S = \frac{0{,}75 \cdot a^2}{2}$

$a = \sqrt{\frac{2S}{0{,}75}}$

$a = 8\ cm$

$b = 0{,}75 \cdot a = 6\ cm$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{(8cm)^2 + (6cm)^2}$

$c = \sqrt{64\ cm^2 + 36\ cm^2}$

$c = \sqrt{100\ cm^2}$

$c = 10\ cm$

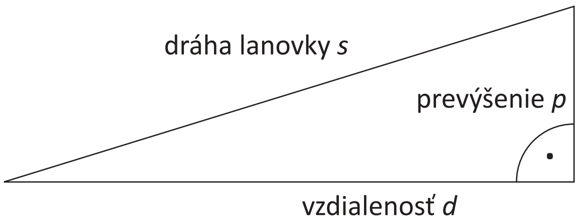
$o = a + b + c$

$o = 8\ cm + 6\ cm + 10\ cm$

$o = 24\ cm$

Obvod pravouhlého trojuholníka je 24 cm.

6 **Vypočítaj, za aký čas prekoná lanovka vzdialenosť medzi dvoma stanicami, ktoré sú od seba vzdialené vzdušnou čiarou s dĺžkou d = 3,2 km. Lanovka sa pohybuje po trase, ktorá má prevýšenie p = 250 m a jej rýchlosť je v = 10 km/h. (Výsledný čas zaokrúhli na celé minúty nahor.)**



vzdialenosť : $d = 3{,}2\ km$

prevýšenie: $p = 250\ m = 0{,}25\ km$

dráha lanovky: $s = ?$ $v = 10\ \frac{km}{h}$; $t = ?$

$s = \sqrt{d^2 + p^2}$ $s = v \cdot t$

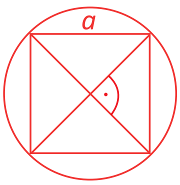
$s = \sqrt{3{,}2^2 + 0{,}25^2}$ $t = s : v$

$s = 3{,}21\ km$ $t = 3{,}21\ km : 10\ \frac{km}{h}$

$t = 0{,}321\ h = 19{,}26\ min \doteq 20\ min$

Lanovka prejde vzdialenosť medzi stanicami približne za čas $\boxed{20}$ minút.

7 **Z dubového dreva s priemerom 35,4 cm bol vytesaný trám s maximálnymi možnými rozmermi, ktorý mal tvar pravidelného štvorbokého hranola. Vypočítaj hmotnosť takto vytesaného trámu, ak jeho dĺžka je 1,8 m, pričom vieš, že 1 dm³ dubového dreva má hmotnosť 0,7 kg.**



$d = 35{,}4\ cm = 3{,}54\ dm = c$; $v = 1{,}8\ m = 18\ dm$; $a = b = ?$; $m = ?$

Dĺžka strany: $a = b = \frac{d}{\sqrt{2}} = 2{,}5\ dm$; objem: $V = a^2 \cdot v$; $V = 6{,}25\ dm^2 \cdot 18\ dm = 112{,}5\ dm^3$

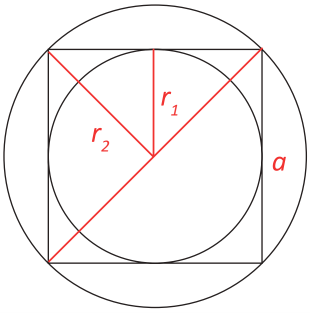
hmotnosť: 1 dm³...............0,7 kg

112,5 dm³..............x kg

$x = 112{,}5\ dm^3 \cdot 0{,}7\ \frac{kg}{dm^3} = 78{,}75\ kg$

Hmotnosť dubového trámu je $\boxed{78{,}75}$ kg.

8 **Štvorcu so stranou 5 cm je vpísaná a opísaná kružnica. Urči polomery vpísanej a opísanej kružnice.**



$a = 5cm$

priemer vpísanej kružnice: $d_1 = a = 5\ cm$

polomer vpísanej kružnice: $r_1 = d_1 : 2 = 2{,}5\ cm$

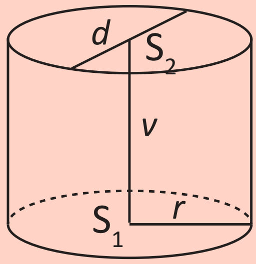
priemer opísanej kružnice: $d_2 = \sqrt{a^2 + a^2} = 7{,}07\ cm$

polomer opísanej kružnice: $r_2 = d_2 : 2 = 3{,}54\ cm$

IV. IHLAN, VALEC, KUŽEĽ, GUĽA, ICH OBJEM A POVRCH

Rotačný valec

- teleso, ktoré vznikne rotáciou obdĺžnika okolo jednej jeho strany (výšky v)



Časti rotačného valca

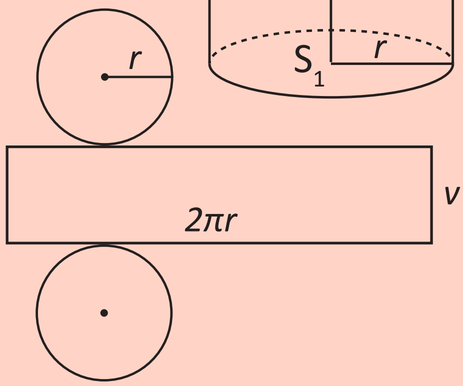
- dve podstavy: horná podstava a dolná podstava, ktoré tvoria kruhy s rovnakým polomerom r
- plášť: obdĺžnik so stranami o (obvod podstavy) a v (výška valca)

Výška valca (v)

- vzdialenosť stredov podstáv; $v = |S_1S_2|$

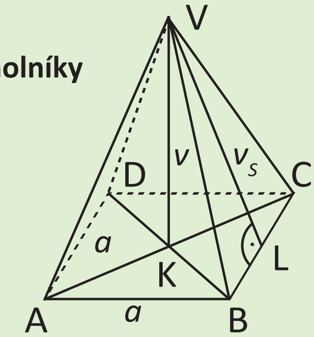
Sieť rotačného valca

- do roviny rozvinuté obe podstavy a plášť



Pravidelný štvorboký ihlan

- teleso, ktorého podstavou je štvorec, plášť tvoria 4 zhodné trojuholníky



Výška ihlana (v)

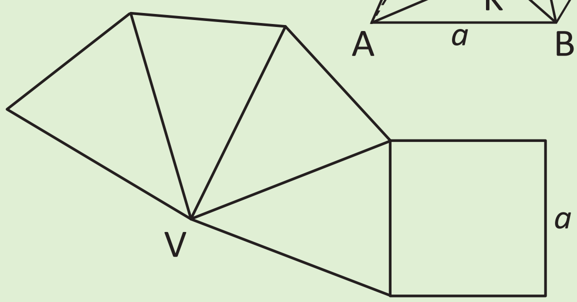
- vzdialenosť hlavného vrcholu od podstavy

Výška steny (v_s)

- výška trojuholníka bočnej steny (kolmica z vrcholu V na stranu štvorca)
- vzdialenosť hlavného vrcholu V od päty kolmice L

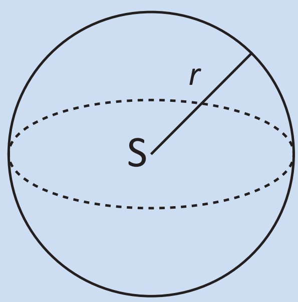
Sieť pravidelného štvorbokého ihlana

- je zložená zo všetkých jeho stien (z podstavy a z plášťa)



Guľa

- teleso, ktoré pozostáva zo všetkých bodov priestoru, ktorých vzdialenosť od stredu je menšia alebo rovná polomeru gule (r: polomer gule)
- rotačné teleso, ktoré vznikne otáčaním kruhu okolo jeho priemeru



Guľová plocha

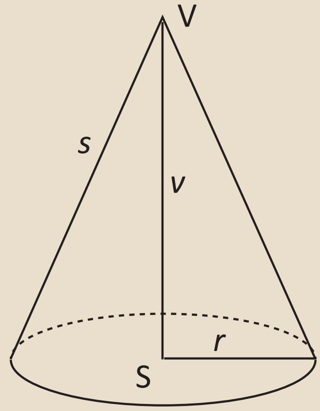
- množina bodov priestoru, ktoré majú od pevného bodu S rovnakú vzdialenosť r, platí: ISXI = r

Sieť gule

- neexistuje, guľovú plochu nemožno rozvinúť do roviny

Rotačný kužeľ

- teleso, ktoré vznikne otáčaním (rotáciou) pravouhlého trojuholníka okolo jeho jednej odvesny (výšky v)



Výška rotačného kužeľa (v)

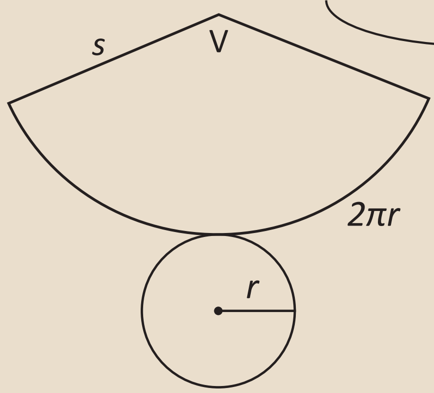
- vzdialenosť hlavného vrcholu od stredu podstavy

Strana rotačného kužeľa (s)

- polomer kruhového výseku (kruhový výsek je plášť rotačného kužeľa)

Časti rotačného kužeľa

- podstava: kruh s polomerom r
- plášť: kruhový výsek, ktorého polomer je strana kužeľa s a ktorého oblúk je obvod podstavy



Sieť rotačného kužeľa

- do roviny rozvinutá podstava a plášť (kruh a kruhový výsek)

Objem a povrch telies

TELESO	OBJEM	POVRCH
Kváder	$V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2\,(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Kocka	$V = a^3$	$S = 6 \cdot a^2$
Rotačný valec	$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$	$S = 2 \cdot \pi \cdot r\,(r + v)$
Pravidelný 4-boký ihlan	$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v$	$S = a^2 + 2 \cdot a \cdot v_s$
Rotačný kužeľ	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$	$S = \pi \cdot r\,(r + s)$
Guľa	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2$

Jednotky objemu

$1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3$
$1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\ mm^3$
$1\ cm^3 = 1\,000\ mm^3$
$1\ dm^3 = 1\ l$
1 hl = 100 l
1 l = 10 dl = 100 cl = 1 000 ml
1 dl = 10 cl = 100 ml
1 cl = 10 ml

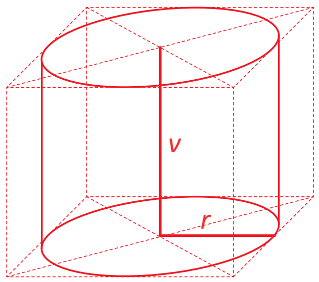
Jednotky obsahu

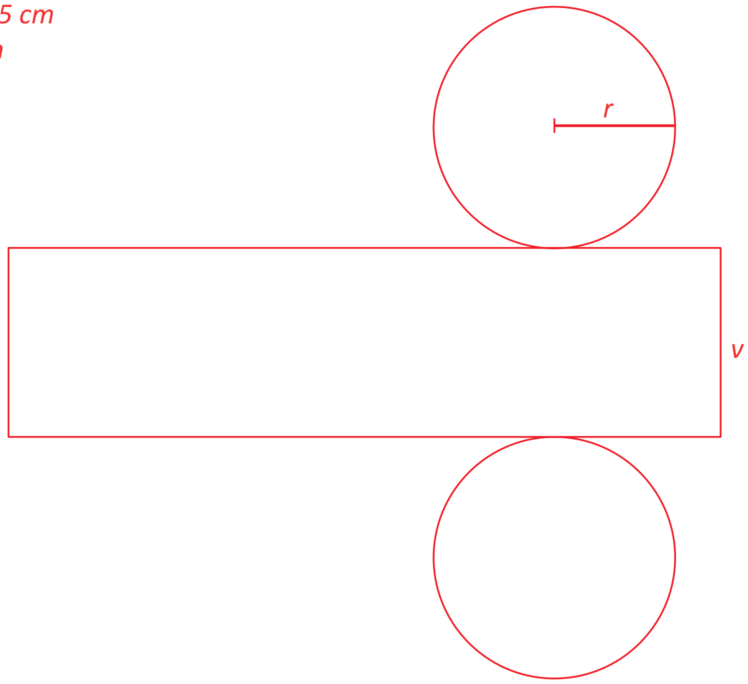
$1\ km^2 = 100\ ha = 10\,000\ a = 1\,000\,000\ m^2$
$1\ ha = 100\ a = 10\,000\ m^2 = 1\,000\,000\,000\ dm^2$
$1\ a = 100\ m^2 = 10\,000\ dm^2 = 1\,000\,000\ cm^2$
$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10\,000\ mm^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

1 ***Daný je valec, ktorého polomer podstavy je 1,5 cm a výška 2,5 cm.***

a) Zostroj sieť valca a vo voľnom rovnobežnom premietaní narysuj obraz valca. Vyznač výšku a polomer valca.

$o = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5$ cm $= 9{,}42$ cm
obdĺžnik s rozmermi 9,42 cm a 2,5 cm
dve kružnice s polomerom 1,5 cm





b) Vzťahy na výpočet povrchu a objemu valca úzko súvisia s rovnakými vzťahmi pre hranol. Napíš tieto vzťahy.

TELESO	POVRCH	OBJEM
Hranol	$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$	$V = S_p \cdot v$
Valec	$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2\pi r(r + v)$	$V = S_p \cdot v = \pi \cdot r^2 \cdot v$

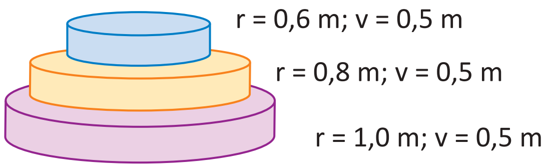
2 ***Doplň tabuľku, ak r je polomer podstavy valca, v – výška, S – povrch, V – objem.***

r	1,5 m	0,5 m	20 cm	*4,37 m*
v	3,6 m	*1,91 dm*	*5,96 dm*	$\frac{1}{2}$ m
S	*48,042m^2*	*216,974 dm^2*	100 dm^2	*133,65 m^2*
V	*25,434 m^3*	150 000 cm^3	*74,86 dm^3*	30 m^3

a) $V = 3{,}14 \cdot (1{,}5\text{ m})^2 \cdot 3{,}6\text{ m} = 3{,}14 \cdot 2{,}25\text{ m}^2 \cdot 3{,}6\text{ m} = 25{,}434\text{ m}^2$
$S = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}5\text{ m} \cdot (1{,}5\text{ m} + 3{,}6\text{ m}) = 6{,}28 \cdot 1{,}5\text{ m} \cdot 5{,}1\text{ m} = 48{,}042\text{ m}^2$
b) $v = V : \pi : r^2 = 150\,000\text{ cm}^3 : 3{,}14 : 50\text{ cm} : 50\text{ cm} = 19{,}108\text{ cm}$
$S = 2 \cdot \pi \cdot 50\text{ cm}\,(50\text{ cm} + 19{,}1\text{ cm}) = 6{,}28 \cdot 50\text{ cm} \cdot 69{,}1\text{ cm} = 21\,697{,}4\text{ cm}^2$
c) $v = S : 2\pi r - r = 100\text{ dm}^2 : (6{,}28 \cdot 2\text{ dm}) - 2\text{ dm} = 100\text{ dm}^2 : 12{,}56\text{ dm} - 2\text{ dm} = 7{,}961\text{ dm} - 2\text{ dm} = 5{,}961\text{ dm}$
$V = 3{,}14 \cdot (2\text{ dm})^2 \cdot 5{,}961\text{ dm} = 74{,}86\text{ dm}^3$
d) $r = \sqrt{V : \pi : v} = \sqrt{30\text{ m}^3 : 3{,}14 : 0{,}5\text{ m}} = \sqrt{19{,}10} = 4{,}37\text{ m}$
$S = 6{,}28 \cdot 4{,}37\text{ m} \cdot (4{,}37\,, + 0{,}5\text{ m}) = 27{,}\,4436\text{ m} \cdot 4{,}87\text{ m} = 133{,}65\text{ m}^2$

3 ***Vo Vysokých Tatrách sa v zimnom období pravidelne koná tradičné podujatie TATRY ICE MASTER. Vypočítaj hmotnosť trojposchodovej ľadovej torty na obrázku. Zisti pomocou internetu hustotu ľadu pre daný výpočet.***

$V_1 = \pi \cdot 0{,}6\ m \cdot 0{,}6\ m \cdot 0{,}5\ m = 0{,}5632\ m^3$
$V_2 = \pi \cdot 0{,}8\ m \cdot 0{,}8\ m \cdot 0{,}5\ m = 1{,}0048\ m^3$
$V_3 = \pi \cdot 1m \cdot 1\ m \cdot 0{,}5\ m = 1{,}57\ m^3$
$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0{,}5652\ m^3 + 1{,}0048\ m^3 + 1{,}57\ m^3 = 3{,}14\ m^3$
$m = \rho \cdot V = 920\ \frac{kg}{m^2} \cdot 3{,}14\ m^3 = 2\ 888{,}8\ kg$



Hmotnosť trojposchodovej ľadovej torty je *2 888,8* kg.

4 ***Studňa lásky na Trenčianskom hrade, ktorú kopal Omar pre oslobodenie Fatimy, mala tvar valca s priemerom 1,5 m. Hĺbka vody v studni bola 8 m a vzdialenosť od hladiny vody po terén mala dĺžku 5 metrov. Koľko m³ zeminy vykopal Omar pri kopaní studne? Koľko litrov vody bolo v studni?***

$d = 1{,}5\ m$
$v_1 = 8\ m$
$v_2 = 5\ m$
$V_z = ?$
$V_v = ?$

$V_z = \pi \cdot r^2 \cdot v$
$V_z = \pi \cdot r^2 \cdot (v_1 + v_2)$
$V_z = 3{,}14 \cdot 0{,}75\ m \cdot 0{,}75\ m \cdot (8m + 5\ m)$
$V_z = 22{,}96125\ m^3 \doteq 22{,}96\ m^3$

$V_v = \pi \cdot r^2 \cdot v_1$
$V_v = 3{,}14 \cdot 0{,}75\ m \cdot 0{,}75\ m \cdot 8\ m$
$V_v = 14{,}13\ m^3 = 14\ 130\ dm^3 = 14\ 130\ l$

Pri kopaní studne vykopal Omar *22,96* m³ zeminy. V studni bolo *14 130* litrov vody.

5 ***Koľkokrát sa otočí valec s polomerom 75 cm a šírkou 2 m na ceste dlhej 1,5 kilometra? Stačilo by to na zarovnanie plochy trávnika futbalového ihriska (s rozmermi 100 m × 50 m)?***

$r = 75\ cm = 0{,}75\ m$
$v = 2\ m$
$s = 1{,}5\ km = 1\ 500\ m$

Valec sa otočí: *$o = 2 \cdot \pi \cdot r = 4{,}71\ m$*
$s : o = 1\ 500\ m : 4{,}71\ m = 318{,}47 \doteq 318$-krát

Plocha trávnika: *$S_t = a \cdot b$*
$S_t = 100\ m \cdot 50\ m$
$S_t = 5\ 000\ m^2$

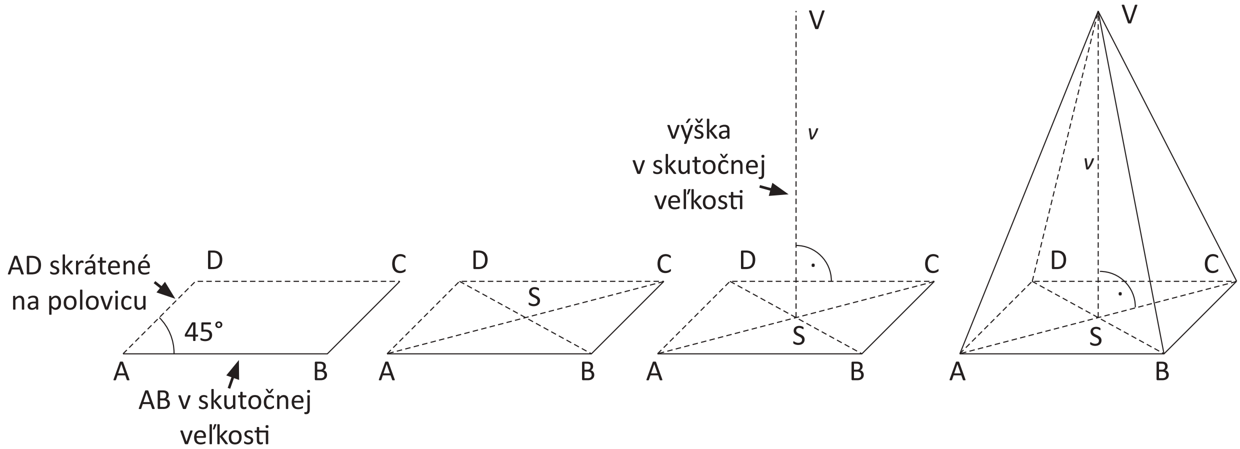
Valec: *$S_{pl} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$*
$S_{pl} = 9{,}42\ m^2$
$S_t : S_{pl} = 530{,}79 \doteq 531$-krát

Valec sa otočí *318* -krát. Na zarovnanie plochy futbalového ihriska by to *nestačilo*.

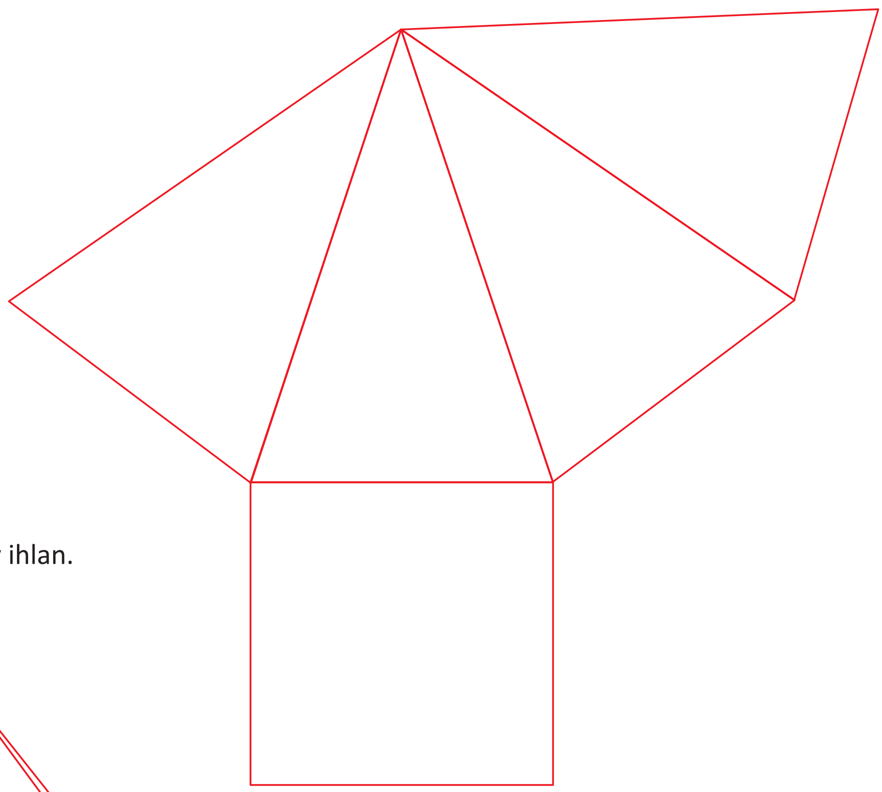
6 ***Doplň tabuľku o pravidelnom n-bokom ihlane.***

PRAVIDELNÝ IHLAN	3-BOKÝ IHLAN	4-BOKÝ IHLAN	6-BOKÝ IHLAN	n-BOKÝ IHLAN
Podstava	*rovnostranný trojuholník*	*štvorec*	*pravidelný šesťuholník*	*pravidelný n-uholník*
Plášť	*tri rovnoramenné trojuholníky*	*štyri rovnoramenné trojuholníky*	*šesť rovnoramenných trojuholníkov*	*n rovnoramenných trojuholníkov*
Počet vrcholov	*4*	*5*	*7*	*n + 1*
Počet hrán	*6*	*8*	*12*	*2 · n*
Počet stien	*4*	*5*	*7*	*n + 1*

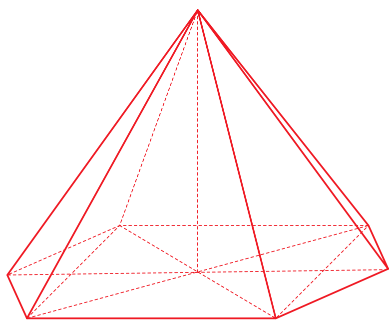
7 *Narysuj podľa uvedeného postupu pravidelný štvorboký ihlan s podstavnou hranou |AB| = 4 cm a výškou ihlana v = 6 cm vo voľnom rovnobežnom premietaní.*



a) Zostroj sieť tohto ihlana.



b) Načrtni pravidelný šesťboký ihlan.



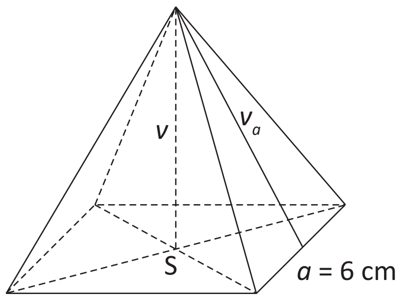
c) Napíš vzorec pre výpočet objemu a povrchu daného pravidelného štvorbokého ihlana.

OBJEM: $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot v$

POVRCH: $S = S_p + S_{pl} = a \cdot a + 2 \cdot a \cdot v_s$

8 ***Vypočítaj objem a povrch:***

a) pravidelného štvorbokého ihlana s podstavnou hranou a = 6 cm a telesovou výškou v = 4 cm



a = 6 cm
v = 4 cm
V = ?
S = ?

$v_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2$

$v_a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2}$

$v_a = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4^2}$

$v_a = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$v_a = \sqrt{25}$

$v_a = 5\ cm$

OBJEM: $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot v$

$V = 48\ cm^3$

POVRCH: $S = S_p + S_{pl}$

$S = a \cdot a + 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$

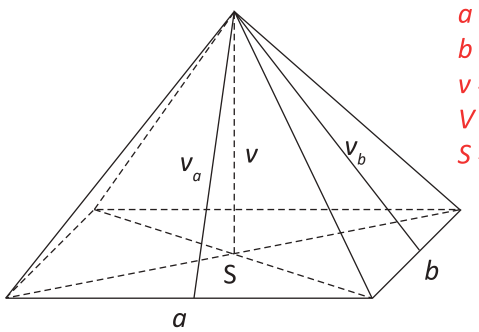
$S = 36\ cm^2 + 60\ cm^2$

$S = 96\ cm^2$

Objem ihlana je 48 cm³ a jeho povrch je 96 cm².

= 12 dm *= 1 dm*

b) ihlana s podstavou obdĺžnika s rozmermi a = 9 dm, b = 1,2 m a výškou telesa v = 10 cm



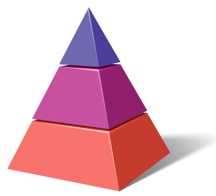
a = 9 dm
b = 1,2 m = 12 dm
v = 10 cm = 1 dm
V = ?
S = ?

POVRCH: $S = S_p + S_{pl}$

$v_a = \sqrt{v^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 6{,}08\ dm$

$v_b = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4{,}6\ dm$

$S = a \cdot b + a \cdot v_a + b \cdot v_b =$
$= 9\ dm \cdot 12\ dm + 9\ dm \cdot 6{,}08\ dm + 12\ dm \cdot 4{,}6\ dm =$
$= 108\ dm^2 + 54{,}72\ dm^2 + 55{,}2\ dm^2 = 217{,}92\ dm^2$



OBJEM: $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$

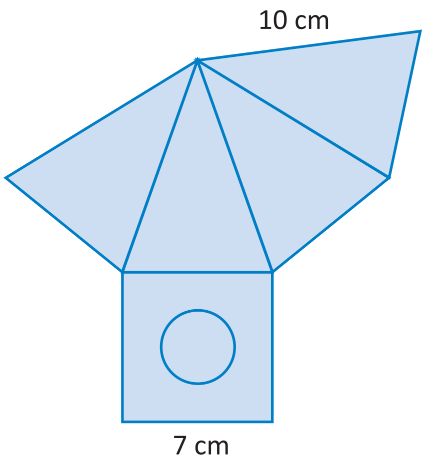
$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot 9\ dm \cdot 12\ dm \cdot 1\ dm$

$V = 36\ dm^3$

Objem ihlana je 36 dm³ a jeho povrch je 217,92 dm².

9 ***Peter si z dovolenky s rodičmi v Egypte priniesol zmenšený model pyramídy (rozmery sú na obrázku). Celá je vyrobená z kovu a má hmotnosť 1 kilogram. Pomocou internetu zisti, z akého kovu je Petrova pyramída.***



$m = 1$ kg
$a = 7$ cm
$h = 10$ cm
$V = ?$
$\rho = ?$

dĺžka uhlopriečky podstavy: $u = \sqrt{a^2 + a^2} = 9{,}89$ cm

výška ihlana: $v = \sqrt{h^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2} = 8{,}69$ cm

objem: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = 141{,}94\ \text{cm}^3$

hustota: $\rho = m : V = 1\,000 : 141{,}94 = 7{,}05\ \text{g/cm}^3$

Zmenšený model pyramídy je vyrobený *zo zinku*.

10 ***V pravidelnom štvorbokom ihlane (bočná hrana h = 110 mm a výška ihlana v = 7 cm) vypočítaj:***

a) podstavnú hranu a

$\frac{u}{2} = \sqrt{h^2 - v^2} = 8{,}49$ cm

$a = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = 12$ cm

$a = 12$ cm

b) výšku steny v_a

$v_p = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 9{,}2$ cm

$v_a = 9{,}2$ cm

c) povrch ihlana S

$S = a^2 + 2 \cdot a \cdot va = 12\ \text{cm} \cdot 12\ \text{cm} + 2 \cdot 12\ \text{cm} \cdot 9{,}2\ \text{cm} =$
$= 144\ \text{cm}^2 + 220{,}8\ \text{cm}^2 = 364{,}8\ \text{cm}^2$

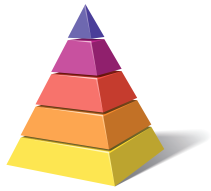
$S = 364{,}8\ \text{cm}^2$

d) objem ihlana V

$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 144\ \text{cm}^2 \cdot 7\ \text{cm} = 336\ \text{cm}^3$

$V = 336\ \text{cm}^3$

11 ***Daný zápis predstavuje výpočet telesovej výšky pravidelného štvorbokého ihlana. Vypočítaj jeho výšku s danými hodnotami.*** *(rozmery sú v cm)*



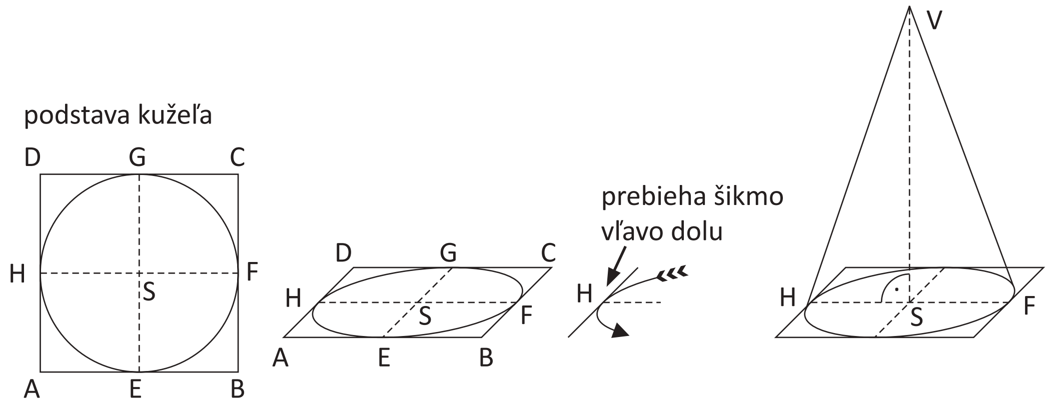
$$v = \frac{3 \cdot V}{a^2} = \frac{3 \cdot 124{,}5}{6^2}$$

$V = 124{,}5\ cm^3$; $a = 0{,}6\ dm = 6\ cm$; $v = ?$

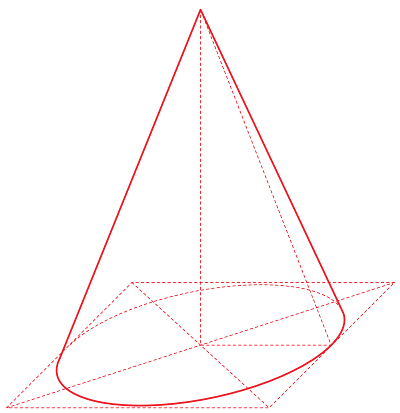
$v = 10{,}375\ cm$

Veľkosť telesovej výšky pravidelného štvorbokého ihlana je 10,375 cm.

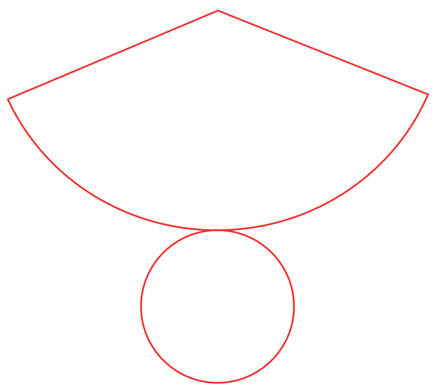
12 ***Podľa návodu načrtni voľnou rukou obraz rotačného kužeľa vo voľnom rovnobežnom premietaní a zostroj jeho sieť.***



a) obraz kužeľa



b) sieť kužeľa

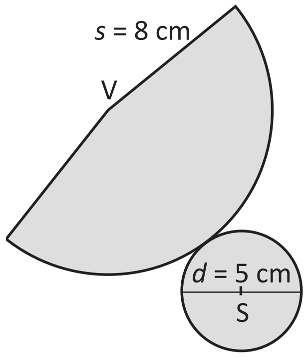


c) Napíš vzťah na výpočet povrchu a objemu rotačného kužeľa.

OBJEM: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$

POVRCH: $S = \pi \cdot r \cdot (r + s)$

13 ***Na základe náčrtu siete správne pomenuj teleso. Vypočítaj povrch a objem z údajov na obrázku.***



s = 8 cm
d = 5 cm
r = 2,5 cm
S = ?
V = ?

POVRCH: $S = \pi \cdot r \cdot (r + s)$

$S = 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot (2{,}5 + 8)$

$S = 82{,}425\ cm^2$

OBJEM: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$

$v = \sqrt{s^2 - r^2} = 7{,}6\ cm$

$V = \frac{1}{3}\, 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot 7{,}6$

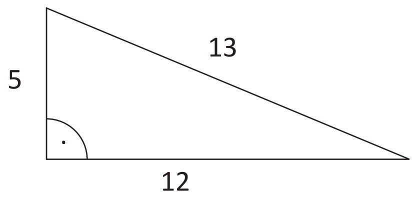
$V = 49{,}72\ cm^3$

Povrch telesa je 82,425 cm². Objem telesa je 49,72 cm³.

Názov telesa je *rotačný kužeľ* .

14 ***Pravouhlý trojuholník má rozmery 5 cm, 12 cm a 13 cm.***

a) Aké rozmery bude mať kužeľ, ktorý vznikne rotáciou trojuholníka okolo kratšej odvesny? Urči objem a povrch.

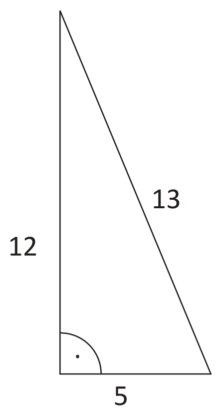


r = 12 cm
v = 5 cm
s = 13 cm
V = ?
S = ?

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v = 753{,}6\ cm^3$

$S = \pi \cdot r \cdot (r + s) = 942\ cm^2$

b) Aké rozmery bude mať kužeľ, ktorý vznikne rotáciou trojuholníka okolo dlhšej odvesny? Urči objem a povrch.



r = 5 cm
v = 12 cm
s = 13 cm
V = ?
S = ?

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v = 314\ cm^3$

$S = \pi \cdot r \cdot (r + s) = 282{,}6\ cm^2$

15 ***Obsah plášťa rotačného kužeľa je 219,8 cm² a obsah jeho podstavy 78,5 cm². Vypočítaj objem tohto kužeľa.***

$S_{pl} = 219{,}8\ cm^2;\ S_p = 78{,}5\ cm^2;\ V = ?$
$S_p = \pi \cdot r^2;\ S_{pl} = \pi \cdot r \cdot s$

OBJEM: $V = \dfrac{1}{3}\ \pi \cdot r^2 \cdot v$

$v = \sqrt{s^2 - r^2} = 13{,}07\ cm$

$r = \sqrt{\dfrac{S_p}{\pi}} = 5\ cm$

$s = \dfrac{S_{pl}}{\pi \cdot r} = 14\ cm;\ V = 342\ cm^3$

Objem kužeľa je približne 342 cm³.

16 ***Vypočítaj povrch a objem kužeľa, ak poznáš:***

a) priemer podstavy d = 1,8 dm a výšku kužeľa v = 12 cm

$r = 0{,}9\ dm = 9\ cm;\ v = 12\ cm;\ S = ?;\ V = ?$

$V = \dfrac{1}{3}\ \pi \cdot r^2 \cdot v = 1\,017{,}36\ cm^3$

$s = \sqrt{v^2 + r^2} = 15\ cm;\ S = \pi \cdot r \cdot (r + s) = 678{,}24\ cm^2$

Povrch kužeľa je 678,24 cm² a objem kužeľa je 1 017,36 cm³.

b) stranu s = 50 mm a polomer r = 0,4 dm

$r = 0{,}4\ dm = 4\ cm;\ s = 50\ mm = 5\ cm;\ S = ?;\ V = ?$

$S = \pi \cdot r \cdot (r + s) = 113{,}04\ cm^2$

$v = \sqrt{s^2 - r^2} = 3\ cm;\ V = \dfrac{1}{3}\ \pi \cdot r^2 \cdot v = 50{,}24\ cm^3$

Povrch kužeľa je 113,04 cm² a objem kužeľa je 50,24 cm³.

17 ***Vypočítaj povrch a objem gule, ak poznáš:***

a) r = 11 cm

$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1\,519{,}76\ cm^2$

$V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 5\,572{,}45\ cm^3$

POVRCH: $S = 1\,519{,}76\ cm^2$
OBJEM: $V = 5\,572{,}45\ cm^3$

b) d = 3,2 m

$r = 1{,}6\ m;\ S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 32{,}15\ m^2$

$V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 17{,}15\ m^3$

POVRCH: $S = 32{,}15\ m^2$
OBJEM: $V = 17{,}15\ m^3$

18 ***Daný zápis predstavuje výpočet polomeru gule. Vypočítaj jej polomer s danými hodnotami. (Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta).***

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{112}{4\pi}} = \sqrt{\frac{112}{4 \cdot 3,14}} = \sqrt{\frac{112}{12,56}} = \sqrt{8,917} \doteq 2,99$$

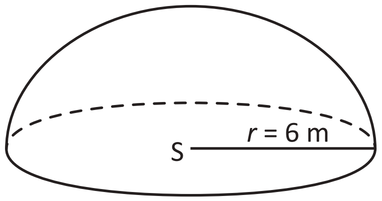
Polomer gule je 2,99.

19 ***Vypočítaj, koľko kože je potrebné na ušitie 200 kusov rehabilitačných lôpt s priemerom 25 cm, ak počítame na spoje 4 %.***

$S = \pi \cdot d^2 = 3,14 \cdot 25^2 = 1\,962,5\ cm^2$
$S\ (200\ lôpt) = 1\,962,5\ cm^2 \cdot 200 = 392\,500\ cm^2$
$104\ \%\ \ldots\ 392\,500\ cm^2 \cdot 1,04 = 408\,200\ cm^2$

Na ušitie 200 kusov rehabilitačných lôpt je potrebné $\boxed{408\,200}$ cm^2 kože.

20 ***O koľko m^2 materiálu viac treba na zakrytie kruhového bazéna kupolou v tvare polgule než kruhovým krytom? Výsledok zaokrúhli na 1 desatinné miesto.***



$r = 6\ m$

zakrytie kupolou: $S' = ?$
$S' = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 6\ m \cdot 6\ m = 6,28 \cdot 36\ m^2 = 226,08\ m^2$

zakrytie kruhom: $S = ?$
$S = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 6\ m \cdot 6\ m = 3,14 \cdot 36\ m^2 = 113,04\ m^2$

rozdiel: $S' - S = 226,08\ m^2 - 113,04\ m^2 = 113,04\ m^2 \doteq 113\ m^2$

Na zakrytie kruhového bazéna kupolou treba o $\boxed{113}$ m^2 materiálu viac než na zakrytie kruhovým krytom.

21 ***Vodojem má tvar gule s priemerom 14 m. Koľko hektolitrov vody sa v ňom nachádza, ak je napustený na 60 %? Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta.***

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (7\ m)^3 \doteq 1\,436,02\ m^3 \rightarrow (60\ \%)\ 861,612\ m^3 = 861\,612\ l = 8\,616,12\ hl$$

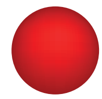
Vo vodojeme sa nachádza $\boxed{8\,616,12}$ hl vody.

22 ***Usporiadaj vzostupne nasledujúce telesá podľa veľkosti ich povrchu.***

a) guľa s priemerom 10 cm

$d = 10$ cm; $r = 5$ cm

$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 314$ cm²



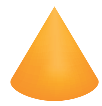
b) kužeľ s podstavou s priemerom 10 cm a výškou 10 cm

$d = 10$ cm; $r = 5$ cm

$v = 10$ cm

$s = \sqrt{v^2 + r^2} = 11{,}18$ cm

$S = \pi \cdot r \cdot (r + s) = 254$ cm²

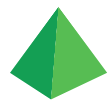


c) pravidelný štvorboký ihlan so stranou podstavy 10 cm a výškou 10 cm

c) $a = 10$ cm; $v = 10$ cm

$$v_p = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 11{,}18 \text{ cm}$$

$$S = a \cdot a + 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 323{,}6 \text{ cm}^2$$

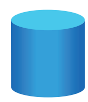


d) valec s podstavou s priemerom 10 cm a výškou 10 cm

$d = 10$ cm; $r = 5$ cm

$v = 10$ cm

$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + v) = 471$ cm²



kužeľ < guľa < ihlan < valec

23 ***Usporiadaj vzostupne nasledujúce telesá podľa veľkosti ich objemu. Zmestí sa do niektorých uvedených telies váza tvaru valca s polomerom 5 cm a výškou 9 cm?***

a) guľa s priemerom 10 cm

$d = 10$ cm; $r = 5$ cm

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 523{,}3 \text{ cm}^3$$

b) kužeľ s podstavou s priemerom 10 cm a výškou 10 cm

$d = 10$ cm; $r = 5$ cm

$$v = 10 \text{ cm}; \; V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v = 261{,}67 \text{ cm}^3$$

c) pravidelný štvorboký ihlan so stranou podstavy 10 cm a výškou 10 cm

$a = 10$ cm; $v = 10$ cm

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = 333{,}3 \text{ cm}^3$$

d) valec s podstavou s priemerom 10 cm a výškou 10 cm

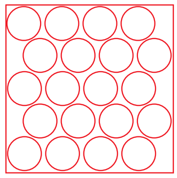
$d = 10$ cm; $r = 5$ cm

$v = 10$ cm; $V = \pi \cdot r^2 \cdot v = 785$ cm³

kužeľ < ihlan < guľa < valec

Zmestí sa do valca, ale je to veľmi natesno. (pozn.: priestor na uvažovanie, kedy sa váza zmestí... materiály...)

24 ***Koľko volejbalových lôpt s obvodom 65 cm sa zmestí do stojana tvaru kocky, ktorého hrana má dĺžku 1 m? Pomôž si náčrtom. Vyplní objem lôpt celý objem stojana?***



$o = 65$ cm => $r = o : 2\pi$ $r = 65$ cm : 6,28 = 10,35 cm

A) 216   B) 200   C) 215   D) 220

Zdanlivo mechanický postup výpočtu (vypočítať objem stojana a objem lopty, vydeliť) nie je správny... vedieme žiakov k úvahe, či je možné „vtlačiť" lopty do celého objemu stojana. Ak r = 10,35 cm, potom d = 20,7 cm, do dĺžky 1 m sa vojdú max. 4 lopty, ďalej uvažujeme spolu so žiakmi, ako sa budú lopty ďalej „ukladať" – nasledujúci rad aj vrstva lôpt „zapadne do medzery". V jednej vrstve môže byť max. 20 lôpt, do celého stojana by malo vojsť 100 lôpt. Záleží aj na tom, z akého materiálu (materiálov) je stojan na lopty vyhotovený... napr. https://sportplus.sk/601-voziky-a-stojany-na-lopty

Ani jedna z možností A, B, C, D nie je správna. Objem lôpt určite nevyplní celý objem stojana.

Pozn. Vypočítajte objem všetkých lôpt, ktoré sa vojdú do stojana a vyjadrite, koľko % je to z objemu stojana.

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (10{,}35)^3 = 4\,641{,}83\ cm^3$; $V_{100} = 100 \cdot 4\,641{,}83\ cm^3 = 464\,183\ cm^3$

$V_k = 100\ cm \cdot 100\ cm \cdot 100\ cm = 1\,000\,000\ cm^3$

$464\,183\ cm^3 : 1\,000\,000\ cm^3 = 0{,}464183 \ldots 46{,}4183\ \%$

25 ***Peter začína s chovom rybičiek. Dočítal sa, že na každú rybičku, ktorú si vybral, by malo v akváriu pripadnúť aspoň 300 ml vody. Peter si chce kúpiť 5 rybičiek a dať ich do akvária tvaru gule, pričom voda zaberie 80 % jeho objemu. Aké najmenšie akvárium z ponuky si môže Peter vybrať?***

a) akvárium s priemerom 15 cm
b) akvárium s priemerom 25 cm
c) akvárium s priemerom 30 cm

a) $d = 15$ cm; $r = 7{,}5$ cm

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 1\,766{,}25\ cm^3$

$80\ \% \cdot V = 0{,}8 \cdot V = 1\,413\ cm^3$

b) $d = 25$ cm; $r = 12{,}5$ cm

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 8\,177{,}06\ cm^3$

$80\ \% \cdot V = 0{,}8 \cdot V = 6\,541{,}\overline{6}\ cm^3$

c) $d = 30$ cm; $r = 15$ cm

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 14\,130\ cm^3$

$80\ \% \cdot V = 0{,}8 \cdot V = 11\,304\ cm^3$

1 rybička .... 300 ml vody = 300 cm^3 vody
5 rybičiek....... $5 \cdot 300 = 1\,500\ cm^3$ vody

Petrovi stačí akvárium s priemerom 25 cm.

26 ***Jana chce svojej mame k narodeninám objednať z internetu šálku na kávu. Najmenej akú vysokú škatuľku má Jana vyrobiť, aby sa šálka tvaru pologule do nej zmestila? K šálke je uvedené, že má objem 4 dl.***

$V = 4\ dl = 0{,}4\ dm^3$; $r = ?$ $0{,}4\ dm^3 = 400\ cm^3$

objem pologule: $V = \dfrac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{2}$

$r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot V}{2 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 400}{2 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{1\,200}{6{,}28}} = \sqrt[3]{191{,}08} \doteq 5{,}8$

Škatuľka by mala mať výšku aspoň 5,8 cm.

27 ***Súrodenci majú nový kruhový bazén s priemerom 7,5 m. Chcú si okolo neho dať vybetónovať 1 m široký chodník. Koľko cementu potrebujú kúpiť, ak na 1 m³ betónu potrebujú 200 kg cementu? Plánovaná hrúbka chodníka je 15 cm.***

$d_1 = 9{,}5$ m; $r_1 = 4{,}75$ m
$d_2 = 7{,}5$ m; $r_2 = 3{,}75$ m
$v = 15$ cm $= 0{,}15$ m
$V = ?$

$V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot v = 3{,}14 \cdot (3{,}75\ \text{m})^2 \cdot 0{,}15\ \text{m} = 6{,}623\ \text{m}^3$

$V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot v = 3{,}14 \cdot (4{,}75\ \text{m})^2 \cdot 0{,}15\ \text{m} = 10{,}626\ \text{m}^3$

$V = V_2 - V_1 = 10{,}626\ \text{m}^3 - 6{,}623\ \text{m}^3 = 4{,}003\ \text{m}^3$

1 m³ betónu........ 200 kg cementu

cement ... $4{,}003\ \text{m}^3 \cdot 200\ \text{kg/m}^3 = 800{,}6\ \text{kg} = 801\ \text{kg}$

Súrodenci potrebuju kúpiť *801* kg cementu.

28 ***Môžeme vyliať celú pollitrovú malinovku do nádoby v tvare kužeľa s priemerom kruhového okraja 14 cm a výškou 15 cm?***

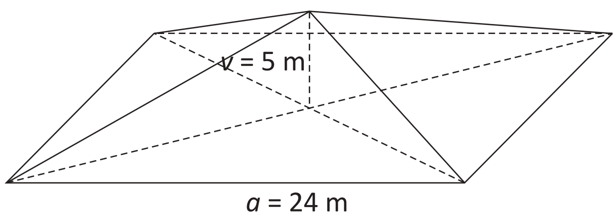
$r = 7$ cm; $v = 15$ cm; $V_1 = 0{,}5$ l $= 500$ cm³; $V = ?$

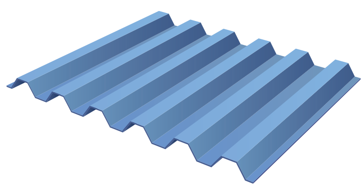
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$$

$V = 769{,}3\ \text{cm}^3$
$500\ \text{cm}^3 < 769{,}3\ \text{cm}^3$

Do nádoby v tvare kužeľa *môžeme* vyliať celú malinovku naraz.

29 ***Akú plochu bude potrebné pokryť novou krytinou na streche haly tvaru pravidelného štvorbokého ihlanu s podstavnou hranou dĺžky a = 24 m a výškou krovu v = 5 m?***





$a = 24$ m; $v = 5$ m; $S_{pl} = ?$

$$v_s = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$v_s = \sqrt{(5m)^2 + (12m)^2}$$
$$v_s = \sqrt{25\ m^2 + 144\ m^2}$$
$$v_s = \sqrt{169\ m^2}$$
$$v_s = 13\ m$$

$$S_{pl} = 4 \cdot \frac{a \cdot v_s}{2}$$
$$S_{pl} = 2 \cdot a \cdot v_s$$
$$S_{pl} = 2 \cdot 24\ m \cdot 13\ m$$
$$S_{pl} = 624\ m^2$$

Bude potrebné pokryť *624* m² plochy.

OPAKOVANIE I.

1 ***Vypočítaj výšku Cheopsovej pyramídy po jej postavení, ak jej objem bol 2 583 283 m³ a rozmery základne boli 230,12 m × 230,12 m. Výsledok zaokrúhli na 2 desatinné miesta. Nájdi na internete jej súčasnú výšku a zisti rozdiel.***

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v;\ v = \frac{3V}{a^2} = 146{,}35$ m

Výška Cheopsovej pyramídy po jej postavení bola *146,35* m.

súčasná výška 138,8 m; rozdiel ... 146,35 m – 138,8 m = 7,55 m

Rozdiel medzi pôvodnou a súčasnou výškou je *7,55* m.

2 ***Výška rotačného kužeľa v = 12 cm a polomer podstavy r = 9 cm. Vypočítaj povrch tohto kužeľa v cm².***

$v = 12$ cm; $r = 9$ cm; $S = ?$

$S = \pi \cdot r \cdot (r + s);\ s = \sqrt{v^2 + r^2} = 15$ cm

$S = 3{,}14 \cdot 9 \cdot (9 + 15)$

$S = 678{,}24$ cm²

Povrch tohto kužeľa je *678,24* cm².

3 ***Do prázdnej nádrže tvaru valca s priemerom dna 8 m priteká potrubím 62,8 hl vody za hodinu. Približne do akej výšky bude nádrž naplnená, ak voda bude pritekať 4 hodiny?***

$d = 8$ m $= 80$ dm; $r = 40$ dm; $V = 62{,}8$ hl $= 6\,280$ l $= 6\,280$ dm³

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ $\quad v = V : (\pi \cdot r \cdot r)$ $\quad V^* = 4 \cdot 6\,280$ dm³ $= 25\,120$ dm³

výška vody za 1 hodinu: $v_1 = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = 1{,}25$ dm

výška vody za 4 hodiny: $v_2 = 4 \cdot v_1 = 4 \cdot 1{,}25$ dm $= 5$ dm

$v = 25\,120$ dm³ $: (\pi \cdot 40$ dm $\cdot 40$ dm$) =$
$= 25\,120$ dm³ $: 5\,024$ dm² $= 5$ dm

Nádrž bude naplnená približne do výšky *5* dm.

4 ***Kovová guľa s objemom 15 dm³ má hmotnosť 118 kg. Vypočítaj:***

a) hustotu gule a pomocou internetu zisti, z akého kovu je guľa vyrobená

b) priemer gule

c) povrch gule

a)

$V = 15$ dm³ $= 0{,}015$ m³

$\rho = m : V$

$m = 118$ kg

$\rho = 118 : 0{,}015$

$\rho = ?$ kg/m³

$\rho = 7\,866{,}66 = 7\,870$ kg/m³

b)

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 15\,000}{4 \cdot 3{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{45\,000}{12{,}56}} = \sqrt[3]{3582{,}8025} = 15{,}3$

$r = 15{,}3$ cm $= 0{,}153$ m

$d = 2 \cdot r = 2 \cdot 0{,}153$ m $= 0{,}306$ m

Priemer gule je 0,306 m.

c)

$S = \pi d^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}306\ \text{m})^2 =$

$3{,}14 \cdot 0{,}093636$ m² $= 0{,}294$ m²

$S = 0{,}294$ m²

Povrch gule je 0,294 m².

Guľa je vyrobená *zo železa*.

OPAKOVANIE II.

1 ***Rotačný kužeľ má stranu s = 15 cm a výšku v = 12 cm. Vypočítaj objem tohto kužeľa.***

$s = 15$ cm; $v = 12$ cm; $V = ?$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$; $r = \sqrt{s^2 - r^2} = 9$ cm; $V = 1\,017{,}36$ cm^3

Objem tohto kužeľa je $\boxed{1\,017{,}36}$ cm^3.

2 ***Vypočítaj povrch valca S s priemerom podstavy d = 2 cm a výškou v = 0,3 m.***

$d = 2$ cm; $r = 1$ cm; $v = 0{,}3$ m $= 30$ cm; $S = ?$

$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + v)$

$S = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot (1 + 30)$

$S = 194{,}68$ cm^2

Povrch valca je $\boxed{194{,}68}$ cm^2.

3 ***Dana si kúpila v obchodnom dome fitloptu na cvičenie. Priemer lopty je 65 cm. Aký bude objem vzduchu v lopte po jej nafúknutí? Výsledok vyjadri v litroch a zaokrúhli na 2 desatinné miesta.***

$d = 65$ cm; $r = 32{,}5$ cm; $V = ?$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V = 143\,720{,}31$ cm$^3 = 143{,}72031$ dm$^3 = 143{,}72031$ l $\doteq 143{,}72$ l

Vo fitlopte bude po nafúknutí $\boxed{143{,}72}$ l vzduchu .

4 ***Je daný pravidelný štvorboký ihlan, ktorého hrana podstavy a = 14 cm. Výška v = 7 cm. Vypočítaj:***

a) objem
b) povrch
c) dĺžku bočnej hrany

$a = 14$ cm; $v = 7$ cm

a) $V = ?$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v$

$V = 457{,}33$ cm^3

b) $S = ?$

$S = a \cdot a + 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$; $v_a = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 9{,}9$ cm

$S = 14 \cdot 14 + 2 \cdot 14 \cdot 9{,}9$

$S = 473{,}2$ cm^2

c) $b = ?$

$b = \sqrt{v_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$b = \sqrt{9{,}9^2 + 7^2}$

$b = 12{,}12$ cm

Objem pravidelného štvorbokého ihlana je 457,33 cm³, povrch je 473,2 cm²

a dĺžka bočnej hrany je 12,12 cm.

V. RIEŠENIE LINEÁRNYCH ROVNÍC A NEROVNÍC S JEDNOU NEZNÁMOU

Lineárna rovnica s jednou neznámou

- každá rovnosť zapísaná v tvare $a \cdot x + b = 0$, kde a, b sú ľubovoľné čísla, pričom $a \neq 0$

$$2x + 10 = 0 \; (a = 2;\; b = 10)$$

Ekvivalentná úprava lineárnej rovnice

- úprava rovnice, ktorá mení len tvar lineárnej rovnice a nemení množinu koreňov rovnice

Strany rovnice

- ľavá strana rovnice Ľ(x): $2x + 10$
- pravá strana rovnice P(x): 0

Koreň rovnice

- hodnota neznámej je číslo, pre ktoré sa hodnoty výrazov na ľavej a pravej strane rovnajú
- riešenie rovnice

$2x + 10 = 0 / -10$ ekvivalentná úprava
$2x + 10 - 10 = 0 - 10$
$2x = -10 / :2$ ekvivalentná úprava
$2x : 2 = -10 : 2$
$x = -5$ koreň rovnice

Najbežnejšie ekvivalentné úpravy rovníc

- výmena ľavej a pravej strany rovnice
- pričítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám rovnice
- odčítanie toho istého čísla alebo mnohočlena od obidvoch strán rovnice
- vynásobenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom
- vydelenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom

Pri riešení lineárnych rovníc $a \cdot x + b = 0$ môžu nastať tri prípady:

a) $a \neq 0$
- potom $a \cdot x = -b$ má práve jeden koreň $x = -\frac{b}{a}$

b) $a = b = 0$
- po úprave $0 = 0$ (rovnosť platí)
- pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení
- koreňom rovnice je každé reálne číslo

c) $a = 0,\; b \neq 0$
- po úprave $0 = -b$ (a zároveň $b \neq 0$)
- ide o nepravdivú rovnosť
- pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie

Skúška správnosti

- vypočítaný koreň rovnice dosadíme za neznámu a skontrolujeme rovnosť výrazov
- overíme, či hodnota výrazu na ľavej strane rovnice (Ľ) sa rovná hodnote výrazu na pravej strane rovnice (P)

Ľ$(-5) = 2x + 10 = 2 \cdot (-5) + 10 = -10 + 10 = 0$
P$(-5) = 0$
Ľ$(-5) =$ P(-5)

Nerovnice

- zápisy, kde ľavá strana Ľ(x) a pravá strana P(x) nerovnice sú spojené znakmi nerovnosti
  $2x + 10 > 0$ ($a = 2$; $b = 10$)
- ostré nerovnosti: Ľ(x) < P(x); Ľ(x) > P(x)
- neostré nerovnosti: Ľ(x) ≤ P(x); Ľ(x) ≥ P(x)

Strany nerovnice

- ľavá strana nerovnice
  Ľ(x): $2x + 10$
- pravá strana nerovnice
  P(x): 0

Lineárna nerovnica s jednou neznámou

- nerovnosť dvoch výrazov s neznámou x, ktorú vieme upraviť na tvary
  $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$
  kde a, b sú ľubovoľné čísla, pričom $a \neq 0$

Neznáma v lineárnej nerovnici

- premenná (písmeno)

Ekvivalentná úprava lineárnej nerovnice

- úprava nerovnice, ktorá mení len tvar lineárnej nerovnice a nemení množinu koreňov nerovnice

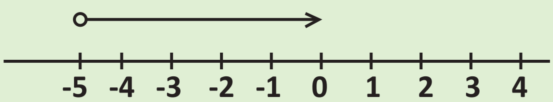
Najbežnejšie ekvivalentné úpravy lineárnych nerovníc

- môžeme vymeniť pravú a ľavú stranu nerovice a súčasne obrátiť znak nerovnosti
- k obidvom stranám nerovnice pripočítame to isté číslo alebo výraz definovaný v obore riešenia nerovnice
- od oboch strán nerovnice odčítame to isté číslo alebo výraz definovaný v obore riešenia nerovnice
- obidve strany nerovnice vynásobíme tým istým kladným číslom
- obidve strany nerovnice vynásobíme tým istým záporným číslom a súčasne zmeníme znak nerovnosti na opačný
- obidve strany nerovnice vydelíme tým istým kladným číslom
- obidve strany nerovnice vydelíme tým istým záporným číslom a súčasne zmeníme znak nerovnosti na opačný

Korene nerovnice

- riešenia nerovnice
- znázorňujeme ich na číselnej osi

$2x + 10 > 0 \quad / - 10$ ekvivalentná úprava
$2x + 10 - 10 > 0 - 10$
$2x > -10 \quad / : 2$ ekvivalentná úprava
$2x : 2 > -10 : 2$
$x > -5$ koreň nerovnice



Čiastočné overenie správnosti riešenia lineárnej nerovnice

- vyberieme jeden z koreňov nerovnice
- dosadíme ho do ľavej a pravej strany nerovnice
- zisťujeme, či pre získané hodnoty platí daná nerovnosť

1 ***Zapíš ako výraz pomocou premennej uvedenej v zátvorke.***

a) Tongská priekopa je o 42 m plytšia ako najhlbšia Mariánska priekopa (x) $x - 42$

b) Angelov vodopád je o 31 m vyšší ako vodopády Tugela (z) $z + 31$

c) Preliačina Mŕtveho mora je 10-krát hlbšia ako nížina polostrova Valdés (y) $y \cdot 10$

d) Beringov prieliv má 2-krát menšiu dĺžku ako Kórejský prieliv (a) $a : 2$

e) Preliačiny tvoria asi jednu polovicu z plochy Kaspickej nížiny (b) $\frac{1}{2} \cdot b$

2 ***Vyjadri premennú y pomocou rovnosti y = ...***

a) trom osminám čísla a $y = \frac{3}{8}a$

b) polovici čísla c zmenšenej o jedna $y = \frac{1}{2}c - 1$

c) tretine čísla k zväčšenej o päť $y = \frac{1}{3}k + 5$

d) dvojnásobku čísla u plus tri $y = 2 \cdot u + 3$

3 ***Zapíš rovnicou a vypočítaj:***

a) ku ktorému neznámemu číslu máme pripočítať číslo 18, aby sme dostali 42

$x + 18 = 42$
$x = 42 - 18$
$x = 24$

b) od ktorého neznámeho čísla máme odčítať číslo 27, aby bol výsledok −12

$x - 27 = -12$
$x = -12 + 27$
$x = 15$

c) o koľko máme zmenšiť číslo 487, aby sme dostali číslo 249

$487 - x = 249$
$487 - 249 = x$
$238 = x$

d) o koľko je potrebné zväčšiť číslo −183, aby sme dostali päťnásobok čísla 48

$-183 + x = 5 \cdot 48$
$x = 240 + 183$
$x = 423$

4 V daných rovniciach urči počet riešení a rovnice vyrieš v množine reálnych čísel.

a) $5x - 7 = -7$

$5x = -7 + 7$
$5x = 0$
$x = 0$

1 riešenie; $x = 0$

d) $4x + 1 = 2 \cdot (2x - 1)$

$4x + 1 = 4x - 2$
$0 \neq -3$

žiadne riešenie

b) $6 - 8x = 2 \cdot (3 - 4x)$

$6 - 8x = 6 - 8x$
$0 = 0$

nekonečne veľa riešení

e) $9x - 12 = -3 \cdot (4 - 3x)$

$9x - 12 = -12 + 9x$
$0 = 0$

nekonečne veľa riešení

c) $2x - 3 - 2x = 3$

$-3 \neq 3$

žiadne riešenie

f) $5 \cdot (1 - 4x) = 4 \cdot (-5x + 2)$

$5 - 20x = -20x + 8$
$5 \neq 8$

žiadne riešenie

5 Rieš rovnice v množine reálnych čísel a urob skúšky správnosti.

a) $13(x - 0{,}2) = 6(2x - 0{,}1)$

$13x - 2{,}6 = 12x - 0{,}6$
$x = -0{,}6 + 2{,}6$
$x = 2$

$13 \cdot (2 - 0{,}2) = 6 \cdot (2 \cdot 2 - 0{,}1)$
$13 \cdot 1{,}8 = 6 \cdot (4 - 0{,}1)$
$23{,}4 = 4 \cdot 3{,}9$
$23{,}4 = 23{,}4$

b) $5x - (6 - 3x) = 8 - (-6 - 3x)$

$5x - 6 + 3x = 8 + 6 + 3x$
$8x - 6 = 14 + 3x$
$5x = 20$
$x = 4$

$5 \cdot 4 - (6 - 3 \cdot 4) = 8 - (-6 - 3 \cdot 4)$
$20 - (6 - 12) = 8 - (-6 - 12)$
$20 - (-6) = 8 - (-18)$
$26 = 26$

c) $3x - (x - 1) = 4$

$3x - x + 1 = 4$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2}$ (1,5)

$3 \cdot 1{,}5 - (1{,}5 - 1) = 4$
$4{,}5 - 0{,}5 = 4$
$4 = 4$

6 Doplň do rovnice číslo tak, aby:

a) koreňom rovnice: $a - (5 + 2a) = 8a +$ 4 bolo číslo – 1

b) koreňom rovnice: $2 + 5b = 3b +$ 18 bolo číslo 8

c) koreňom rovnice: $2c + 6c - (c +$ 4 $) = 10$ bolo číslo 2

d) koreňom rovnice: $3d + 7 = 2d - ($ –5 $+ 3d)$ bolo číslo – 0,5

a) $-1 - [5 + 2 \cdot (-1)] = 8 \cdot (-1) + x$
$-1 - 5 + 2 + 8 = x$
$-6 + 10 = x$
$4 = x$

b) $2 + 5 \cdot 8 = 3 \cdot 8 + x$
$2 + 40 = 24 + x$
$42 - 24 = x$
$18 = x$

c) $2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - (2 + x) = 10$
$4 + 12 - 2 - x = 10$
$16 - 2 - 10 = x$
$4 = x$

d) $3 \cdot (-0{,}5) + 7 = 2 \cdot (-0{,}5) - [x + 3 \cdot (-0{,}5)]$
$-1{,}5 + 7 = -1 - (x - 1{,}5)$
$5{,}5 = -1 - x + 1{,}5$
$x = 0{,}5 - 5{,}5$
$x = -5$

7 ***Rieš rovnice v množine reálnych čísel a urob skúšky správnosti.***

a) $4 \cdot (x + 1) = -2 \cdot (-x - 9)$

$4x + 4 = 2x + 18$
$2x = 14$
$x = 7$

$4 \cdot (7 + 1) = -2 \cdot (-7 - 9)$
$4 \cdot 8 = -2 \cdot (-16)$
$32 = 32$

b) $3 \cdot (5x - 2) + 7 = 14x$

$15x - 6 + 7 = 14x$
$15x + 14x = -1$
$x = -1$

$3 \cdot [5 \cdot (-1) - 2] + 7 = 14 \cdot (-1)$
$3 - (-5 - 2) + 7 = -14$
$3 \cdot (-7) + 7 = -14$
$-21 + 7 = -14$
$-14 = -14$

c) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3}$ $\quad / \cdot 15$

$3x - 9 = 5x + 5$
$-14 = 2x$
$x = -7$

$(-7 - 3) : 5 = (-7 + 1) : 3$
$(-10) : 5 = (-6) : 3$
$-2 = -2$

d) $2x - 6 - (6 - 2x) = 0$

$2x - 6 - 6 + 2x = 0$
$4x - 12 = 0$
$4x = 12$
$x = 3$

$2 \cdot 3 - 6 - (6 - 2 \cdot 3) = 0$
$6 - 6 - 6 + 6 = 0$
$0 = 0$

e) $\frac{x}{2} - 5 = 0$ $\quad / \cdot 2$

$x - 10 = 0$
$x = 10$

$\frac{10}{2} - 5 = 0$
$5 - 5 = 0$
$0 = 0$

f) $\frac{x}{2} - \frac{2 - x}{3} = \frac{x + 1}{6}$ $\quad / \cdot 6$

$3x - 4 + 2x = x + 1$
$4x = 5$
$x = \frac{5}{4}$
$x = 1{,}25$

$3 \cdot 1{,}25 - 4 + 2 \cdot 1{,}25 = 1{,}25 + 1$
$3{,}75 - 4 + 2{,}5 = 2{,}25$
$-0{,}25 + 2{,}5 = 2{,}25$
$2{,}25 = 2{,}25$

8 ***Rieš rovnice v množine reálnych čísel a urob skúšky správnosti.***

a) $4 \cdot (x - 3) = 2 \cdot (x + 5)$

$4x - 12 = 2x + 10$
$2x = 22$
$x = 11$

$4 \cdot (11 - 3) = 2 \cdot (11 + 5)$
$4 \cdot 8 = 2 \cdot 16$
$32 = 32$

b) $4x - 4 = 2$

$4x = 6$
$x = 1{,}5$

$4 \cdot 1{,}5 - 4 = 2$
$6 - 4 = 2$
$2 = 2$

c) $x - \frac{x-2}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x-3}{5} = 5$ $\quad / \cdot 60$

$60x - 20x + 40 - 15x + 12x - 36 = 300$
$37x + 4 = 300$
$37x = 296$
$x = 8$

d) $\frac{5x-4}{2} = \frac{1+16x}{7}$ $\quad / \cdot 14$

$35x - 28 = 2 + 32x$
$3x = 30$
$x = 10$

$(5 \cdot 10 - 4) : 2 = (1 + 16 \cdot 10) : 7$
$(50 - 4) : 2 = (1 + 160) : 7$
$46 : 2 = 161 : 7$
$23 = 23$

e) $2 - \frac{5x-2}{7} = \frac{x-10}{2}$ $\quad / \cdot 14$

$28 - 10x + 4 = 7x - 70$
$32 + 70 = 7x + 10x$
$102 = 17x$
$6 = x$

$2 - [(5 \cdot 6) - 2] : 7 = (6 - 10) : 2$
$2 - (30 - 2) : 7 = (-4) : 2$
$2 - 28 : 7 = -2$
$2 - 4 = -2$
$-2 = -2$

f) $2 \cdot (9 + x) = 4 \cdot (x - 2)$

$18 + 2x = 4x - 8$
$26 = 2x$
$13 = x$

$2 \cdot (9 + 13) = 4 \cdot (13 - 2)$
$2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$
$44 = 44$

9 *Rieš rovnice v množine reálnych čísel.*

a) $5y + 30 = 0$

$5y = -30$ $\qquad 5 . (-6) + 30 = 0$

$y = -6$ $\qquad -30 + 30 = 0$

$0 = 0$

d) $2x - 5 = 4x - 11$

$-5 + 11 = 4x - 2x$ $\qquad 2 \cdot 3 - 5 = 4 \cdot 3 - 11$

$6 = 2x$ $\qquad 6 - 5 = 12 - 11$

$3 = x$ $\qquad 1 = 1$

b) $c - 1 = \frac{2c}{3} + 5 \quad / \cdot 3$

$3c - 3 = 2c + 15$ $\qquad 18 - 1 = (2 \cdot 18) : 3 + 5$

$3c - 2c = 18$ $\qquad 17 = 36 : 3 + 5$

$c = 18$ $\qquad 17 = 12 + 5$

$17 = 17$

e) $3(2a + 1) - (4 - a) = 2(3a + 2)$

$6a + 3 - 4 + a = 6a + 4$ $\qquad 3 \cdot (2 \cdot 5 +] - (4 - 5) = 2 \cdot (3 \cdot 5 + 2)$

$7a - 6a = 4 + 1$ $\qquad 3 \cdot (10 + 1) - (-1) = 2 \cdot (15 + 2)$

$a = 5$ $\qquad 3 \cdot 11 + 1 = 2 \cdot 17$

$33 + 1 = 34$

$34 = 34$

c) $\frac{b-2}{2} = 3 \quad / \cdot 2$

$b - 2 = 6$ $\qquad (8 - 2) : 2 = 3$

$b = 8$ $\qquad 6 : 2 = 3$

$3 = 3$

f) $\frac{4d}{5} = \frac{8}{15} \quad / \cdot 16$

$12d = 8$

$d = 8/12$

$d = 2/3$

$$\frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15} = \frac{8}{15}$$

10 *Rieš rovnice v množine reálnych čísel a over skúškou správnosti.*

a) $\frac{x-2}{3} - \frac{x+5}{4} = 1 \quad / \cdot 12$

$4x - 8 - 3x - 15 = 12$ $\qquad (35 - 2) : 3 - (35 + 5) : 4 = 1$

$x - 23 = 12$ $\qquad 33 : 3 - 40 : 4 = 1$

$x = 35$ $\qquad 11 - 10 = 1$

$1 = 1$

c) $\frac{2x + 3}{5} - \frac{x - 7}{2} = 7 \quad / \cdot 10$

$4x + 6 - 5x + 35 = 70$ $\qquad [2 \cdot (-29) + 3] : 5 - (-29 - 7) : 2 = 7$

$-x + 41 = 70$ $\qquad (-58 + 3) : 5 - (-36) : 2 = 7$

$-x = 29$ $\qquad (-55) : 5 - (-18) = 7$

$x = -29$ $\qquad -11 + 18 = 7$

$7 = 7$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{x+5}{2} = \frac{x-7}{8} \quad / \cdot 24$

$8x + 16 - 12x - 60 = 3x - 21$

$-4x - 44 = 3x - 21$

$-44 + 21 = 7x$

$-23 = 7xt$

$-\frac{23}{7} = x$

$$\frac{-\frac{23}{7} + 2}{3} - \frac{\frac{23}{7} + 5}{2} = \frac{\frac{23}{7} - 7}{8}$$

$$\frac{\frac{23}{7} + \frac{14}{7}}{3} - \frac{\frac{23}{7} + \frac{35}{7}}{2} = \frac{\frac{23}{7} - \frac{49}{7}}{8}$$

$$-\frac{3}{7} - \frac{6}{7} = -\frac{9}{7}$$

$$-\frac{9}{7} = -\frac{9}{7}$$

d) $\frac{x+7}{5} - 2 = -\frac{5-x}{7} \quad / \cdot 35$

$7x + 49 - 70 = -25 + 5x$ $\qquad (-2 + 7) : 5 - 2 = -[5 - (-2)] : 7$

$2x = -25 + 21$ $\qquad 5 : 5 - 2 = -(5 + 2) : 7$

$2x = -4$ $\qquad 1 - 2 = -7 : 7$

$x = -2$ $\qquad -1 = -1$

11 ***Pani učiteľka diktovala žiakom matematický diktát. Ktoré číslo je riešením tohto matematického diktátu? „Dvojnásobok rozdielu čísla 50 a neznámej x zmenšený o neznámu x je rovný číslu 106. Aké je neznáme číslo?"***

$2 \cdot (50 - x) - x = 106$

$100 - 2x - x = 106$

$-3x = 106 - 100$

$-3x = 6$

$x = -2$

Neznáme číslo je -2.

12 ***Trojuholník má obvod 35 cm. Prvá strana je štyrikrát väčšia ako druhá strana a zároveň o 1 cm väčšia ako tretia strana. Urči veľkosti strán trojuholníka.***

prvá strana.........$a = 4b$
druhá strana.......b
tretia strana........$c = 4b - 1$
obvod .... 35 cm

$4b + b + 4b - 1 = 35$

$9b = 35 + 1$

$9b = 36$

$b = 4$

$a = 4 \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}$
$b = 4\text{ cm}$
$c = 4 \cdot 4\text{ cm} - 1\text{ cm} = 15\text{ cm}$

skúška: 16 cm + 4 cm + 15 cm = 35 cm

Prvá strana trojuholníka má 16 cm, druhá 4 cm a tretia 15 cm.

13 ***Autobusová dopravná spoločnosť má svoj okres rozdelený na sektory. V jednom sektore, v ktorom premávajú len tri autobusy, sa včera previezlo 368 cestujúcich. Vieme, že druhý autobus odviezol o 20 ľudí viac ako prvý a tretí autobus 2-krát viac ako druhý. Koľko ľudí previezol prvý autobus?***

celkový počet cestujúcich: 368
počet cestujucich v prvom autobuse: x
počet cestujucich v druhom autobuse: .... $x + 20$
počet cestujucich v treťom autobuse: .... $2 \cdot (x + 20)$

$x + x + 20 + 2 \cdot (x + 20) = 368$

$4x + 60 = 368$

$4x = 368 - 60$

$4x = 308$

$x = 77$

skúška správnosti
1. autobus ... 77 cestujúcich
2. autobus ... 77 + 20 = 97 cestujúcich
3. autobus ... 2 . 97 = 194 cestujúcich
spolu .... 77 + 97 + 194 = 368

Prvý autobus včera previezol 77 cestujúcich.

14 ***Na školskej súťaži mali žiaci vytvoriť zo šnúrok z topánok čo najdlhšiu reťaz. Šiestacka reťaz bola 1,5-krát dlhšia ako piatacka, siedmaci vytvorili reťaz o 4,5 metra kratšiu ako šiestaci. Ôsmacka reťaz bola o 9,5 metra dlhšia ako piatacka. Deviatacka reťaz bola o 5 metrov dlhšia ako siedmacka reťaz. Dĺžka všetkých reťazí spolu bola 155 metrov. Aké boli dĺžky reťazí jednotlivých ročníkov?***

$$x + 1{,}5x + 1{,}5x - 4{,}5 + 9{,}5 + x + 1{,}5x + 0{,}5 = 155$$
$$6{,}5x + 5{,}5 = 155$$
$$6{,}5x = 149{,}5$$
$$x = 23$$

piatacka reťaz........................23 m
šiestacka reťaz.......................$1{,}5 \cdot x = 34{,}5$ m
siedmacka reťaz...................($1{,}5 \cdot x - 4{,}5$ m) = 30 m
ôsmacka reťaz.......................($x + 9{,}5$ m) = 32,5 m
deviatacka reťaz: ....35 m

skúška: 23 m + 34,5 m + 30 m + 32,5v+ 35 m = 155 m

Vytvorené reťaze: piataci 23 m, šiestaci 34,5 m, siedmaci 30 m, ôsmaci 32,5 m, deviataci 35 m.

15 ***Minúta hovoru v mobilnej sieti stojí 0,12 €. Jedna SMS správa je spoplatňovaná sumou 0,06 €. Zákazník dostal faktúru na sumu 9 €. Pamätal si, že poslal 10 SMS správ. Koľko minút pretelefonoval zákazník za mesiac (zostav aj rovnicu)?***

minúta hovoru x
cena hovoru ....0,12x €
cena 10 SMS správ.......$10 \cdot 0{,}06$ €
faktúra na sumu...................9 €

$$0{,}12x + 10 \cdot 0{,}06 = 9$$
$$0{,}12x + 0{,}6 = 9$$
$$0{,}12x = 8{,}4$$
$$x = 70$$

$0{,}12x + 10 \cdot 0{,}06 = 0{,}12 \cdot 70 + 10 \cdot 0{,}06 = 9$

Zákazník pretelefonoval 70 minút.

16 ***Tri kamarátky Monika, Lucia a Helena zbierajú fotografie. Keby mala Monika o 3 fotografie viac ako má, mala by toľko ako Helena. Keby Lucia mala o 5 fotografií menej ako má, mala by toľko, čo Helena. Koľko fotografií má každá, ak spolu majú 431 fotografií?***

Helena............ x
Monika............ x – 3
Lucia .... x + 5
spolu............... 431

$$x + x - 3 + x + 5 = 431$$
$$3x + 2 = 431$$
$$3x = 429$$
$$x = 143$$

Helena............x = 143
Monika.....x – 3 = 140
Lucia.........x + 5 = 148

skúška: 143 + 140 +148 = 431

Helena má 143 fotografií, Monika má 140 fotografií a Lucia má 148 fotografií.

17 ***V automate na predaj cestovných lístkov bolo spolu sto mincí. Boli to iba 20 a 50-centové mince. Suma spolu bola 29 € a 60 centov. Koľko bolo v automate ktorých mincí?***

20–centové..........x
50–centové.........100 – x
Spolu...................29 € 60 c = 2 960 c

$$20x + 50 \cdot (100 - x) = 2\,960$$
$$20x + 5\,000 - 50x = 2\,960$$
$$-30x + 5\,000 = 2\,960$$
$$5\,000 - 2\,960 = 30x$$
$$2\,040 = 30\,x$$
$$68 = x$$

20–centových mincí ....x = 68
50–centovych mincí ....100 – x = 32

skúška: 68 + 32 = 100

V automate bolo 68 dvadsaťcentových a 32 päťdesiatcentových mincí.

18 ***Sestry Zuzana, Lenka a Viera šetrili na bicykel. Zuzana našetrila 80 eur, Lenka našetrila 90 eur a Viera našetrila 82 eur. Chýbajúcich 30 % im doložila mamka. Koľko eur stojí bicykel?***

Zuzana našetrila .... 80 €
Lenka našetrila .... 90 €
Viera našetrila .... 82 €
Mamka doložila chýbajúcich 30 %
bicykel stojí .... x €
70 % .... 80 + 90 + 82 = 252 €
100 % .... x €

$$\frac{x}{252} = \frac{100}{70}$$
$$x = \frac{100 \cdot 252}{70}$$
$$x = 360$$

360 – (80 + 90 + 82) = 108; 0,3 · 360 = 108 € (mamka doložila 108 €)

Bicykel stojí 360 eur.

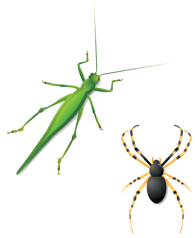
19 ***V karaváne idúcej cez púšť sú jednohrbé a dvojhrbé ťavy. Napočítali sme 28 ťavích hláv a 45 hrbov. Jednohrbých tiav v karaváne je:***

A) 33   *B) 11*   C) 36   D) 13

jednohrbých tiav...x ....počet hrbov........1x
dvojhrbých............28 – x........ počet hrbov........2 · (28 – x)
spolu......................28.......... počet hrbov........45

$1x + 2 \cdot (28 - x) = 45$
$x + 56 - 2x = 45$
$-x = -11$
$x = 11$ *skúška:* $11 + 28 - 11 = 28;\ 1 \cdot 11 + 2 \cdot (28 - 11) = 45$

20 ***Juraj si zakladá zbierku pavúkov a chrobákov. Zatiaľ ich má spolu iba 8. Na otázku spolužiakov, koľko má pavúkov a koľko má chrobákov odpovedal: "Celá moja zbierka má už 54 nôh." Koľko pavúkov a koľko chrobákov obsahuje Jurajova zbierka? Pavúk má 8 nôh a chrobák 6 nôh.***



pavúkov............x..........počet nôh..........8x
chrobákov.........8 – x........počet nôh..........6 · (8 – x)
spolu ....8..........počet nôh..........54

$8x + 6 \cdot (8 - x) = 54$
$8x + 48 - 6x = 54$
$2x = 54 - 48$
$2x = 6$
$x = 3$

skúška: $3 + 8 - 3 = 8;\ 8 \cdot 3 + 6 \cdot (8 - 3) = 54$

Juraj má v zbierke $\boxed{3}$ pavúkov a $\boxed{5}$ chrobákov.

21 ***Katarína má veľký balíček cukríkov. Štvrtinu z nich zjedla a pätinu ponúkla svojim spolužiakom. Zvyšok cukríkov rozdelila na dve rovnaké časti a tie dala svojim dvom súrodencom. Brat Michal dostal 33 cukríkov. Koľko cukríkov mala Katarína v balíčku na začiatku?***

počet cukríkov.......... x
zjedla..................... $\frac{1}{4}x$
spolužiakom.......... $\frac{1}{5}x$
brat Michal................33
druhý súrodenec......33

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 33 + 33 = x$
$66 = x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x$
$66 = \frac{(20x - 5x - 4x)}{20}$
$66 = \frac{11x}{20}$
$1320 = 11x$
$120 = x$

zjedla: 30; spolužiakom: 24; brat Michal: 33; druhý súrodenec: 33; Spolu: 30 + 24 + 33 + 33 = 120

Katarína mala v balíčku $\boxed{120}$ cukríkov.

22 ***O 8.00 h vyrazil z Bratislavy rýchlik Tatranec do Popradu vzdialeného 340 km. V tom istom čase vyrazil z Popradu rýchlik Liptovčan do Bratislavy. Rýchlik Tatranec išiel priemernou rýchlosťou 80 km/h, Liptovčan išiel priemernou rýchlosťou 90 km/h. V akej vzdialenosti od Popradu sa vlaky budú míňať?***

vzdialenosť miesta stretnutia od Bratislavy – s_1
vzdialenosť miesta stretnutia od Popradu – s_2
s_1; $t_1 = t$; $v_1 = 80$ km/h s_2; $t_2 = t$; $v_2 = 90$ km/h

Bratislava $s = 340$ km *Poprad*

$s_1 + s_2 = s$
$v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = s$

$$80t + 90t = 340$$
$$170t = 340$$
$$t = 2$$

$$s_2 = 90\,\frac{km}{h} \cdot 2\text{ h} = 180\text{ km}$$

$s_1 + s_2 = 80 \cdot 2 + 90 \cdot 2 = 160 + 180 = 340 = s$

Vlaky sa budú míňať $\boxed{180}$ km od Popradu.

23 ***Roman a Martin bývali od seba 165 km ďaleko a jedného dňa sa chceli stretnúť. O 6.30 h vyrazil Roman na bicykli priemernou rýchlosťou 30 km/h. Oproti nemu o 8.00 h vyšiel Martin na motocykli priemernou rýchlosťou 50 km/h. Koľko % vzdialenosti medzi oboma bydliskami prešiel Roman, kým sa stretli?***

vzdialenosť miesta stretnutia od miesta bydliska Romana – s_1
vzdialenosť miesta stretnutia od miesta bydliska Martina – s_2
s_1; $t_1 = t + 1{,}5$; $v_1 = 30$ km/h s_2; $t_2 = t$; $v_2 = 50$ km/h

Roman $s = 165$ km *Martin*

$s_1 + s_2 = s$
$v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = s$

$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 30 \cdot (1{,}5 + 1{,}5) = 90$

$$30 \cdot (t + 1{,}5) + 50 \cdot t = 165$$
$$30t + 45 + 50t = 165$$
$$80t = 120$$
$$t = 1{,}5$$

$$\frac{90}{165} = 0{,}5454$$

$0{,}5454 \cdot 100 = 54{,}54$ %

$s_1 + s_2 = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = 90\text{ km} + 75\text{ km} = 165\text{ km} = s$

Roman prešiel $\boxed{90}$ km, čo je $\boxed{54{,}54}$ % vzdialenosti medzi bydliskami.

24

Turista vyrazil ráno o 8.00 h z chaty na túru priemernou rýchlosťou 5 km/h. O 10.30 h chatár zistil, že turista zabudol fotoaparát a vyrazil za ním po tej istej trase na bicykli priemernou rýchlosťou 30 km/h. O koľkej dostihne chatár turistu?

turista prejde dráhu – s_1, za čas – $t_1 = (t + 2{,}5)$
chatár prejde dráhu – s_2, za čas – $t_2 = t$
turista: $s_1 = s$; $t_1 = (t + 2{,}5)$; $v_1 = 5$ km/h

chatár: $s_2 = s$; $t_2 = t$; $v_2 = 30$ km/h

$s_1 = s_2;\ v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$

$5 . (t + 2{,}5) = 30 . t$

$5t + 12{,}5 = 30t$

$12{,}5 = 25t$

$0{,}5 = t$

10.30 h = 10,5 h.......... 10,5 h + 0,5 h = 11 h

$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 5\,\frac{km}{h} \cdot (t + 2{,}5) = 15\ km;\quad s_2 = v_2 \cdot t_2 = 30\,\frac{km}{h} \cdot t = 15\ km;\ s_1 = s_2$

Chatár dostihne turistu o $\boxed{11.00}$ hod.

25

Majster obuvník má 3 učňov. Prvý učeň vyrobí 1 pár čižiem za 4 dni, druhý za 3 dni a tretí za 1,5 dňa. Keby pracovali učni spolu, za aký čas by vyrobili 1 pár čižiem?

prvý učeň.......... 4 dni
druhý učeň .... 3 dni
tretí učeň......... 1,5 dňa
spolu..................x dní

$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{1{,}5} = 1 \quad / \cdot 12$

$3x + 4x + 8x = 12$

$15x = 12$

$x = 0{,}8$

skúška: $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{1{,}5} = \frac{0{,}8}{4} + \frac{0{,}8}{3} + \frac{0{,}8}{1{,}5} = 1$

Učni by spoločne vyrobili pár čižiem za $\boxed{0{,}8}$ dňa.

26

Z Taktikova vyšlo o 11.00 h nákladné auto rýchlosťou 60 km/h. O 12.30 h za ním vyšlo osobné auto priemernou rýchlosťou 80 km/h. Koľko km od Taktikova dobehne osobné auto nákladné auto?

nákladné auto prejde dráhu – s_1, za čas ..... $t_1 = (t + 1{,}5)$
osobné auto prejde dráhu – s_2, za čas...... $t_2 = t$
nákladné auto: $s_1 = s$; $t_1 = (t + 1{,}5)$; $v_1 = 60\,\frac{km}{h}$

osobné auto: $s_2 = s$; $t_2 = t$; $v_2 = 80\,\frac{km}{h}$

$s_1 = s_2$

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$

$60 \cdot (t + 1{,}5) = 80 \cdot t$

$60t + 90 = 80t$

$90 = 20t$

$4{,}5 = t$

$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 80\,\frac{km}{h} \cdot 4{,}5\ h = 360\ km$

$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 60\,\frac{km}{h} \cdot (4{,}5\ h + 1{,}5\ h) = 360\ km$

Osobné auto dobehne nákladné auto $\boxed{360}$ km od Taktikova.

27 ***Na hodine techniky v škole pri výrobe vtáčej búdky pracujú žiaci v skupinách po dvoch. Ak by Michal pracoval sám, vyrobil by búdku za 3 hodiny. Richard by ju vyrobil za 2 hodiny. Keď budú pracovať spolu, za koľko hodín ju vyrobia? O koľko percent viac času v porovnaní s časom spoločnej práce by vyrábal búdku Michal sám?***

Michal......... 3 hodiny
Richard..........2 hodiny
Spolu..................x hodín

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 1 \quad / \cdot 6$$
$$2x + 3x = 6$$
$$5x = 6$$
$$x = 1{,}2$$

1,2 h ... 100 %
3 h – 1,2 h = 1,8 h
1,8 h : 1,2 h = 1,5
1,5 · 100 % = 150 %

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{1{,}2}{3} + \frac{1{,}2}{2} = 1$$

Michal a Richard vyrobia vtáčiu búdku za $\boxed{1{,}2}$ hod. Michalovi samému by to trvalo o $\boxed{150}$ % času dlhšie ako obom chlapcom naraz.

28 ***Škola má na školskom dvore bazén. Bazén sa naplní menším čerpadlom za 7,5 hodín, stredným čerpadlom za 5 hodín a veľkým za 3 hodiny. Za koľko hodín sa naplní bazén na školskom dvore, ak sú zapnuté všetky čerpadlá súčasne?***

menším čerpadlom ....7,5 hodín
stredným čerpadlom .... 5 hodín
veľkým čerpadlom .... 3 hodiny
všetky čerpadlá súčasne............x hodín

$$\frac{x}{7{,}5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1 \quad / \cdot 15$$
$$2x + 3x + 5x = 15$$
$$10x = 15$$
$$x = 1{,}5$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7{,}5} = \frac{1{,}5}{3} + \frac{1{,}5}{5} + \frac{1{,}5}{7{,}5} = 1$$

Bazén na školskom dvore sa naplní za $\boxed{1{,}5}$ hodiny.

29 ***Rodina chce nechať upraviť svoju záhradu. Zavolali si dve záhradnícke firmy. Prvá by celú záhradu upravila za 20 dní, druhej by to trvalo o 40 % času menej. Ako dlho budú pracovať spoločne, ak druhá firma začala pracovať vtedy, keď prvá už odpracovala 4 dni?***

1. firma upravila záhradu za .... 20 dní
2. firma upravila záhradu o .... 40 % času menej; 20 – (0,4 · 20) = 12 dní
2. firma začala pracovať o .... 4 dni neskôr
Spolu pracovali ....x dní

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{4}{20} = 1 \quad / \cdot 60$$
$$5x + 3x + 12 = 60$$
$$8x + 12 = 60$$
$$8x = 48$$
$$x = 6$$

$$\frac{6}{20} + \frac{6}{12} + \frac{4}{20} = \frac{18 + 30 + 12}{60} = 1$$

Záhradnícke firmy spoločne upravia záhradu za $\boxed{6}$ dní.

30 Urči, čomu sa nesmie rovnať premenná x, ak platí:

a) $x - 5 \neq 0$

$x - 5 \neq 0$
$x \neq 5$

b) $2x + 3 \neq 0$

$2x \neq -3$
$x \neq -\frac{3}{2}$
$x \neq -1{,}5$

c) $3x - 3 \neq 0$

$3x \neq 3$
$x \neq 1$

d) $2x + 8 \neq 0$

$2x \neq -8$
$x \neq -4$

31 Urči, kedy sa výraz nerovná nule.

a) $x + 6$

$x + 6 \neq 0$
$x \neq -6$

b) $5x - 8$

$5x - 8 \neq 0$
$5x \neq 8$
$x \neq 1{,}6$

c) $2x + 6$

$2x + 6 \neq 0$
$2x \neq -6$
$x \neq -3$

d) $4x + 2$

$4x + 2 \neq 0$
$4x \neq -2$
$x \neq -\frac{2}{4}$
$x \neq -0{,}5$

32 Urči, kedy je menovateľ rôzny od nuly.

a) $\frac{x+2}{x-2}$

$x - 2 \neq 0$
$x \neq 2$

b) $\frac{2x-5}{x}$

$x \neq 0$

c) $\frac{2}{7x+2}$

$7x + 2 \neq 0$
$7x \neq -2$
$x \neq -\frac{2}{7}$

d) $\frac{x-6}{3x-9}$

$3x - 9 \neq 0$
$3x \neq 9$
$x \neq 3$

33 Rieš rovnice v množine reálnych čísel a urob skúšku správnosti.

a) $\frac{3}{x} - 1 = 0$

$\frac{3}{x} = 1$
$3 = x$

$\frac{3}{3} - 1 = 0$
$1 - 1 = 0$
$0 = 0$

c) $\frac{1-2x}{x} = -3$

$1 - 2x = -3x$
$1 = -x$
$-1 = x$

$1 - 2(-1) : (-1) = -3$
$3 : (-1) = -3$
$-3 = -3$

b) $\frac{5x-2}{2x} = \frac{3}{2}$

$2 \cdot (5x - 2) = 3 \cdot 2x$
$10x - 4 = 6x$
$4x = 4$
$x = 1$

$5 \cdot 1 - 2 : 2 \cdot 1 = \frac{3}{2}$
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

d) $8 = \frac{x-1}{x-6}$

$8 \cdot (x - 6) = x - 1$
$8x - 48 = x - 1$
$7x = 47$
$x = \frac{47}{7}$

$8 = \left(\frac{47}{7} - 1\right) : \left(\frac{47}{7} - 6\right)$
$8 = \left(\frac{47}{7} - \frac{7}{7}\right) : \left(\frac{47}{7} - \frac{42}{7}\right)$
$8 = \frac{40}{7} : \frac{5}{7}$
$8 = 40 : 5$
$8 = 8$

34 ***Rieš rovnice s neznámou v menovateli v množine reálnych čísel, urči podmienky riešiteľnosti a urob skúšku správnosti***

a) $\frac{x+3}{x}=2$

$x + 3 = 2x$
$3 = 2x - x$
$3 = x$

$(3 + 3) : 3 = 2$
$6 : 3 = 2$
$2 = 2$

podmienka: $x \neq 0$

c) $\frac{3x-5}{2x+1}=1$

$3x - 5 = 2x + 1$
$x = 6$

$(3 \cdot 6 - 5) : (2 \cdot 6 + 1) = 1$
$(18 - 5) : (12 + 1) = 1$
$13 : 13 = 1$
$1 = 1$

podmienka: $2x + 1 \neq 0$
$2x \neq -1$
$x \neq -\frac{1}{2}$
$x \neq -0{,}5$

b) $\frac{5}{x}+\frac{2}{x}=4-\frac{1}{4}$

$\frac{7}{X} = \frac{15}{4}$
$28 = 15x$
$\frac{28}{15} = x$

$5 : \frac{28}{15} + 2 : \frac{28}{15} = 4 - \frac{1}{4}$
$\frac{75}{28} + \frac{30}{28} = \frac{75}{4}$
$\frac{105}{28} = \frac{15}{4}$
$\frac{15}{4} = \frac{15}{4}$

podmienka: $x \neq 0$

d) $\frac{3}{x-1}=\frac{8}{x-6}$

$3 \cdot (x - 6) = 8 \cdot (x - 1)$
$3x - 18 = 8x - 8$
$-18 + 8 = 8x - 3x$
$-10 = 5x$
$-2 = x$

$3 : (-2 - 1) = 8 : (-2 - 6$
$3 : (-3) = 8 : (-8)$
$-1 = -1$

podmienka: $x \neq 1;\ x \neq 6$

35 **Rieš rovnice s neznámou v menovateli v množine celých čísel a urob skúšku správnosti.**

a) $\frac{5}{x+2}=\frac{6}{x-3}$

$5 \cdot (x - 3) = 6 \cdot (x + 2)$
$5x - 15 = 6x + 12$
$-27 = x$

$5 : (-27 + 2) = 6 : (-27 - 3)$
$5 : (-25) = 6 : (30)$
$-\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$

$x \neq -2;\ x \neq 3$

c) $\frac{4}{x-5}=\frac{2}{x-10}$

$4 \cdot (x - 10) = 2 \cdot (x - 5)$
$4x - 40 = 2x - 10$
$2x = 30$
$x = 15$

$4 : (15 - 5) = 2 : (15 - 10)$
$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

$x \neq 5;\ x \neq 10$

b) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$

$5 \cdot (x - 4) + 1 = 5 - x$
$5x - 20 + 1 = 5 - x$
$6x = 5 + 20 - 1$
$6x = 24$
$x = 4$
$x \neq 4$; nemá riešenie

d) $\frac{1}{7-x}=\frac{2}{5+x}$

$4 \cdot (x - 10) = 2 \cdot (x - 5)$
$4x - 40 = 2x - 10$
$2x = 30$
$x = 15$

$1 : (7 - 3) = 2 : (5 + 3)$
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$
$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$x \neq 7;\ x \neq -5$

36 Dĺžky strán trojuholníka sú a, b, c. Zapíš:

a) Súčet dĺžok dvoch strán trojuholníka je väčší ako dĺžka tretej strany.

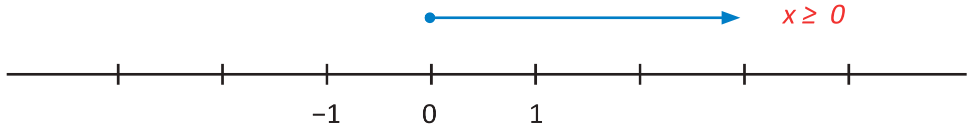
$a + b > c$; $a + c > b$; $b + c > a$

b) Absolútna hodnota rozdielu dĺžok dvoch strán je menšia ako dĺžka tretej strany.

$|a - b| < c$; $|a - c| < b$; $|b - c| < a$

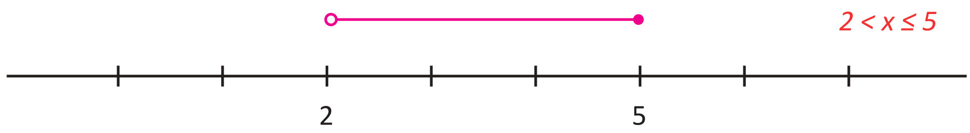
37 Zapíš nerovnicou.

a)



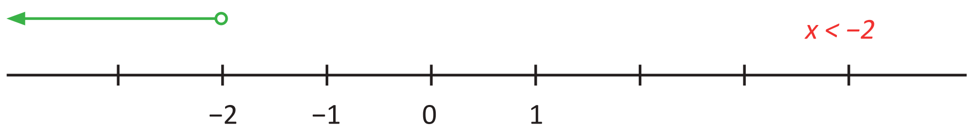
$x \geq 0$

b)



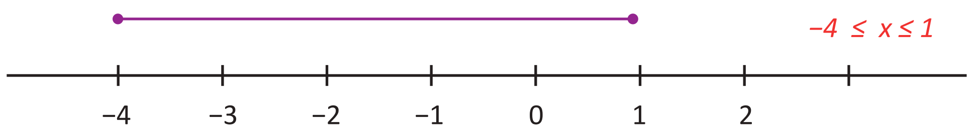
$2 < x \leq 5$

c)



$x < -2$

d)



$-4 \leq x \leq 1$

38 Zapíš všetky celé čísla y, ktoré vyhovujú nasledujúcim nerovniciam, pomocou množín.

a) $4{,}3 < y < 5{,}9$ *$y \in \{5\}$*

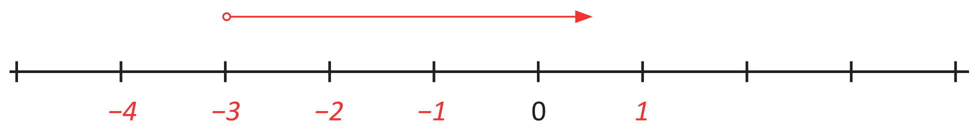
b) $-2{,}3 \leq y \leq 6{,}99$ *$y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*

c) $-10{,}4 < y \leq -7{,}17$ *$y \in \{-10, -9, -8\}$*

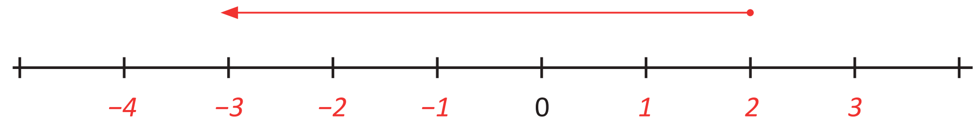
d) $0{,}7 \leq y \leq 0{,}8$ *nemá riešenie*

39 ***Znázorni riešenia nerovníc v množine reálnych čísel na číselnej osi.***

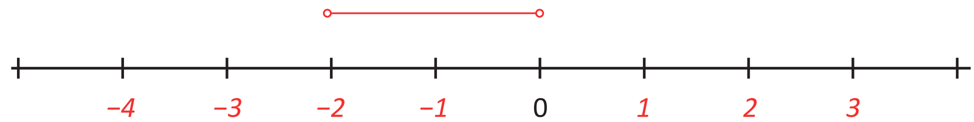
a) $x > -3$



b) $x \leq 2$

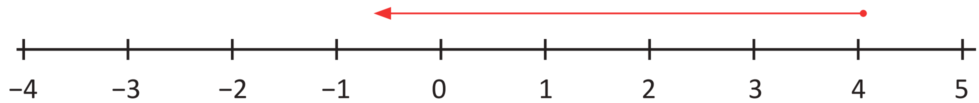


c) $-2 < x < 0$

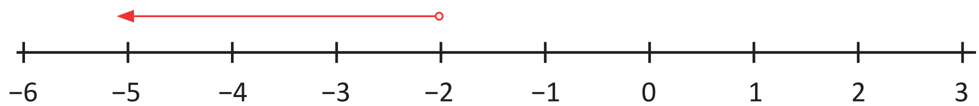


40 ***Znázorni riešenia nerovníc v množine reálnych čísel na číselnej osi.***

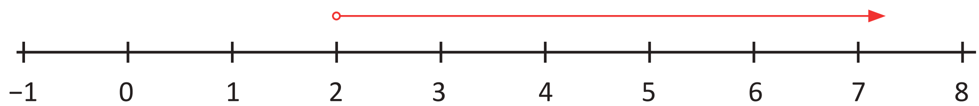
a) $x \leq 4$



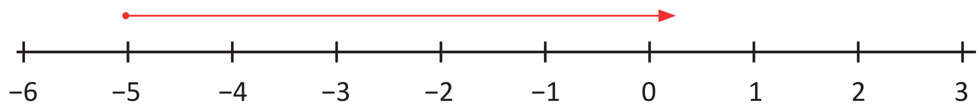
b) $x < -2$



c) $x > 2$



d) $x \geq -5$



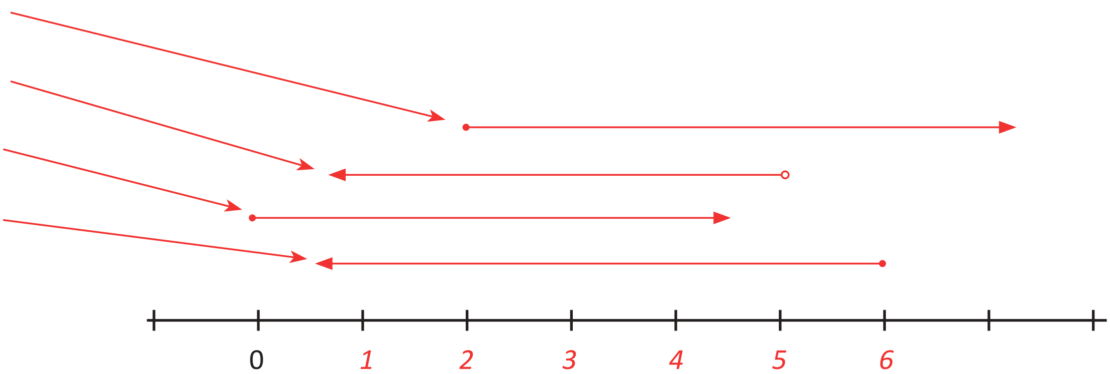
41 ***Znázorni riešenia všetkých nerovníc na jednu číselnú os a urči, ktoré prirodzené čísla sú riešením všetkých nerovníc.***

a) $x \geq 2$

b) $y < 5$

c) $z \geq 0$

d) $a \leq 6$

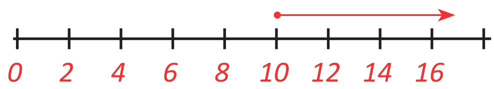


Riešením všetkých nerovníc sú prirodzené čísla 2, 3, 4.

42 Rieš nerovnice v množine reálnych čísel a znázorni na číselnej osi.

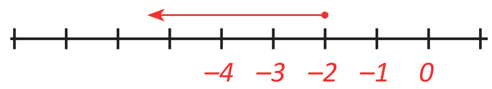
a) $x - 4 \geq 6$

$x \geq 10$



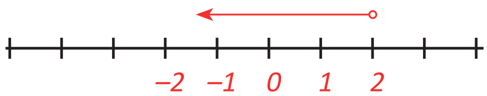
d) $-3a \geq 6$

$a \leq -2$



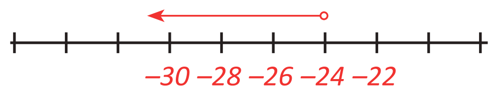
b) $4b < 8$

$b < 2$



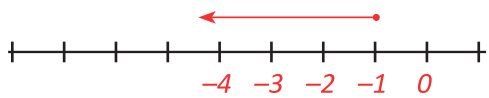
e) $\frac{-2}{3}y > 16$

$y < -24$



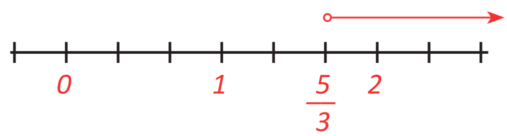
c) $6z + 9 \leq 3$

$z \leq -1$



f) $6x - 3 > 3x + 2$

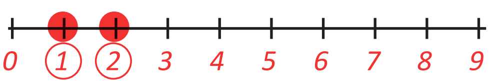
$x > \frac{5}{3}$



43 Rieš nerovnice v množine prirodzených čísel a znázorni na číselnej osi.

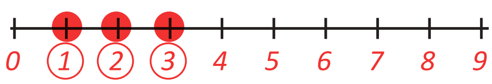
a) $4x < 12$ $x < 3$

$x \in \{1, 2\}$



d) $-2x - 1 > -9$ $-2x > -8 \Rightarrow x < 4$

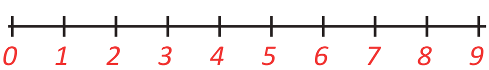
$x \in \{1, 2, 3\}$



b) $8 \cdot (3 - x) \leq -9x$ $24 - 8x \leq -9x$

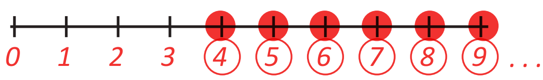
nemá riešenie v N $24 \leq -x$

$-24 \geq x$



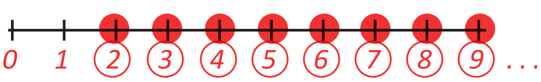
e) $2x - 2 \cdot 8 \geq 3 - 11$ $2x - 16 \geq -8 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$

$x \in \{4, 5, 6, ..., \infty\}$



c) $5{,}1x - 1{,}5 > 7$ $5{,}1x \geq 8{,}5 \Rightarrow x \geq 1{,}66$

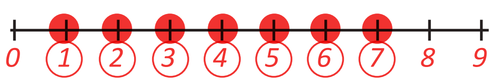
$x \in \{2, 3, 4, ..., \infty\}$



f) $\frac{x}{2} - 3 < \frac{3}{5}$ $\frac{x}{2} \leq \frac{3}{5} + 3 \Rightarrow \frac{x}{2} \leq \frac{3}{5} + \frac{15}{5} \Rightarrow \frac{x}{2} \leq \frac{18}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq \frac{36}{5}$

$x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



44 ***Rieš nerovnice v množine reálnych čísel.***

a) $72 < 6m + 12$

$60 < 6m$
$10 < m$

b) $-2\,(u + 6) \leq 5 - (4u + 3)$

$-2u - 12 \leq 5 - 4u - 12$
$-2u - 12 \leq 2 - 4u$
$2u \leq 14$
$u \leq 7$

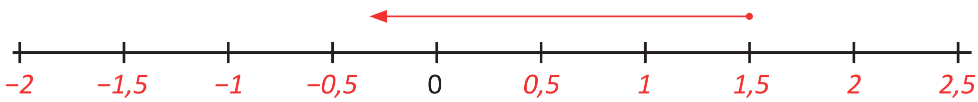
c) $\frac{4y}{5} > \frac{8}{15}$ $\quad / \cdot 15$

$12\,y > 8$
$y > 8/12$
$y > 2/3$

45 **Rieš nerovnicu v množine reálnych čísel a riešenie znázorni na číselnej osi.**

$4 \cdot \frac{(2a - 3)}{2} - 3 \cdot (4 - 3a) \leq a$

$4a - 6 - 12 + 9a \leq a$
$12a \leq 18$
$a \leq 1{,}5$



46 ***Rieš nasledujúce nerovnice v množine reálnych čísel. Riešenie znázorni na číselnej osi.***

a) $\frac{15}{8} + a > 15$

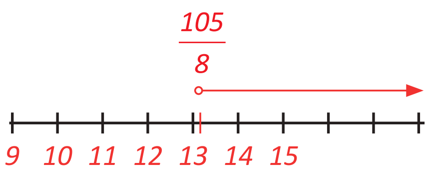
$a > 15 - \frac{15}{8}$
$a > \frac{120}{8} - \frac{15}{8}$
$a > \frac{105}{8}$

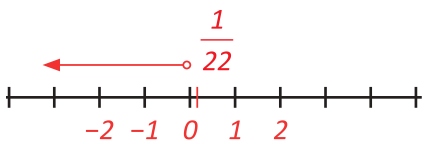
b) $b + \frac{3}{6} < \frac{6}{11}$

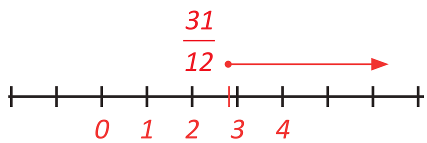
$b < \frac{6}{11} - \frac{3}{6}$
$b < \frac{36}{66} - \frac{33}{66}$
$b < \frac{3}{66}$
$b < \frac{1}{22}$

c) $c + \frac{2 + c}{5} \geq 5 - \frac{3}{2}$ $\quad / \cdot 10$

$10c + 4 + 2c \geq 50 - 15$
$12c \geq 31$
$c \geq \frac{31}{12}$







47 ***Pre aké $y \in R$ je hodnota zlomku $\frac{7-2y}{6}$ väčšia ako hodnota zlomku $\frac{3y-7}{12}$?***

A) $y < 3$ B) $y \leq 3$ *C) $y > 3$* D) $y \geq 3$

$(7-2y) : 6 > (3y-7) : 12 \quad / \cdot 12$

$14 - 4y > 3y - 7$

$21 > 7y$

$3 > y$

$y < 3$

48 ***Rieš nerovnice v množine reálnych čísel. Riešenie znázorni na číselnej osi.***

a) $\frac{x-1}{6} < \frac{x+1}{3} \quad / \cdot 6$

$x - 1 < 2x + 2$

$-3 < x$

b) $\frac{x+3}{4} > \frac{x+4}{8} \quad / \cdot 8$

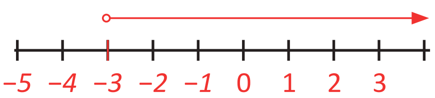
$2x + 6 > x + 4$

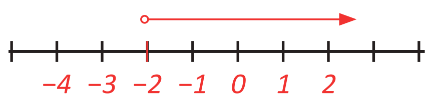
$x > -2$

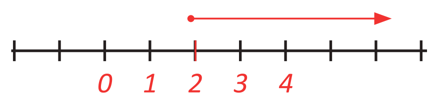
c) $\frac{3(x-2)}{4} \geq \frac{2(x-2)}{3} \quad / \cdot 12$

$9x - 18 \geq 8x - 16$

$x \geq 2$







49 ***Rieš nerovnice v množine reálnych čísel. Riešenie znázorni na číselnej osi.***

a) $\frac{2x-2}{4} < \frac{x+2}{3} \quad / \cdot 12$

$6x - 6 < 4x + 8$

$2x < 14$

$x < 7$

b) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+2}{8} - \frac{x-1}{6} \geq 1 \quad / \cdot 24$

$6x - 6 + 3x + 6 - 4x + 4 \geq 24$

$5x + 4 \geq 24$

$5x \geq 20$

$x \geq 4$

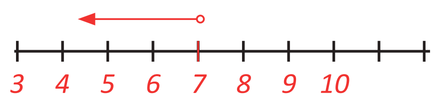
c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{2x-1}{6} \geq \frac{6x-1}{12} \quad / \cdot 12$

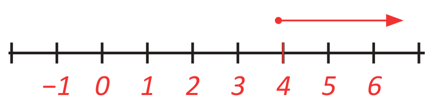
$8x + 4 - 4x + 2 \geq 6x - 1$

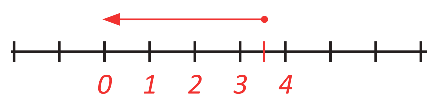
$4x + 6 \geq 6x - 1$

$7 \geq 2x$

$3{,}5 \geq x$







50 ***Starý otec má nové číslo domu. Zistíš ho, ak vypočítaš súčet jednociferných prirodzených čísel vyhovujúcich nerovnici: $4 \cdot (-a + 6) \le 3 \cdot (a - 13) + 2a$.***

$$-4a + 24 \le 3a - 39 + 2a$$
$$24 + 39 \le 9a$$
$$63 \le 9a$$
$$7 \le a$$

Súčet jednociferných čísel vyhovujúcich nerovnici je 7 + 8 + 9 = 24.

Nové číslo domu starého otca je $\boxed{24}$.

51 ***Vonku bolo ráno niekoľko stupňov pod nulou. Je to najmenšia hodnota zo záporných celých čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $5 \cdot (x + 2) > 3x + 2$. Koľko stupňov Celzia ukazoval teplomer ráno?***

$$5x + 10 > 3x + 2$$
$$2x > -8$$
$$x > -4$$

Najmenšia hodnota zo záporných celých čísel, ktoré vyhovujú nerovnici je −3.

Teplota vonku bola ráno $\boxed{-3}$ °C.

52 ***Nájdi také prirodzené číslo, ktorého trojnásobok zväčšený o 5 je väčší ako päťnásobok zmenšený o tretinu čísla 30. Nájdi všetky také čísla.***

Zápis: hľadané prirodzené číslo x
trojnásobok hľadaného prirodzeného čísla zväčšený o 5...............................3x + 5
päťnásobok hľadaného prirodzeného čísla zmenšený o tretinu čísla 30 ....5x − 10

Postup riešenia: $3x + 5 > 5x - 10$

Výpočet: $5 + 10 > 5x - 3x$
$$15 > 2x$$
$$7{,}5 > x$$

Hľadané prirodzené čísla: $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Skúška: napr. $x = 7$; $Ľ(7) = 26$; $P(7) = 25$; $Ľ(7) > P(7)$

Zadaniu vyhovujú tieto čísla: $\boxed{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}$.

53 ***Pán Novák má možnosť nakúpiť jablká na zimné uskladnenie v dvoch sadoch. V prvom sade stojí 1 kg jabĺk 1,40 €, v druhom, vzdialenejšom sade stojí 1 kg jabĺk 0,90 €, ale cesta ho bude stáť 3,60 €. Koľko najmenej kg jabĺk by musel kúpiť, aby sa mu oplatilo zájsť do vzdialenejšieho sadu?***

Zápis: jabĺk..x kg
v 1. sade zaplatí.......................... 1,40x €
v 2. sade zaplatí + cesta............. (0,90x + 3,60) €

Postup riešenia: $1{,}40x > 0{,}90x + 3{,}60$

Výpočet: $x > 7{,}2$

Množstvo jabĺk, ktoré vyhovuje nerovnici je : $x = 8$ *kg*

Skúška: napr. $x = 8$; $Ľ(8) = 11{,}2$; $P(8) = 10{,}8$; $Ľ(8) > P(8)$

Pán Novák musí kúpiť najmenej $\boxed{8}$ kg jabĺk.

54 Vyjadri zo vzorca:

a) pre obsah lichobežníka výšku

$S = \frac{(a+c)}{2} \cdot v; \quad v = \frac{2S}{(a+c)}$

b) pre obvod trojuholníka stranu a

$o = a + b + c; \quad a = o - b - c$

c) pre objem kvádra hranu b

$V = a \cdot b \cdot c; \quad b = \frac{V}{a \cdot c}$

d) pre povrch kocky hranu a

$S = 6 \cdot a^2; \qquad a = \sqrt{\frac{S}{6}}$

55 VVyjadri zo vzorca $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ neznámu a.

A) $a = \frac{v_a}{2S}$ B) $a = \frac{S}{2v_a}$ C) $a = \frac{2v_a}{S}$ D) $a = \frac{2S}{v_a}$

56 Vyjadri zo vzorca $Q = mc(t - t_0)$ neznámu:

a) m

$m = \frac{Q}{c \cdot (t - t_0)}$

b) t

$t = \frac{Q}{mc} + t_0$

c) t_0

$t_0 = t - \frac{Q}{mc}$

57 Vyjadri zo vzorcov z fyziky neznámu v zátvorke.

a) $R = \alpha \cdot \frac{l}{S}$; (l)

$l = \frac{R \cdot S}{\alpha}$

b) $R = R_0(1 + \alpha \cdot t)$; ($R_0$)

$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha \cdot t}$

c) $E = \frac{1}{2} mv^2$; (v)

$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

OPAKOVANIE I.

1 ***Rieš rovnice v množine prirodzených čísel.***

a) $3 \cdot (x-2) + 4 \cdot (x+5) = 35$

$3x - 6 + 4x + 20 = 35$
$7x + 14 = 35$
$7x = 21$
$x = 3$

b) $x - \frac{2x+1}{3} = \frac{x+3}{4} \quad / \cdot 12$

$12x - 8x - 4x = 3x + 9$
$4x - 4 = 3x + 9$
$x = 13$

c) $2 - \frac{3}{5-x} = \frac{5}{5-x} \quad / \cdot (5-x)$

$2 \cdot (5-x) - 3 = 5$
$10 - 2x - 3 = 5$
$2 = 2x$
$1 = x$

podmienka: $x \neq 5$

2 ***Polovica vtáčieho kŕdľa sa usadila na čerešňu, tretina vtáčieho kŕdľa na jabloň, sedmina vtáčieho kŕdľa na hrušku a jeden vtáčik si sadol na slnečnicu. Koľko vtáčikov bolo v kŕdli?***

počet vtáčikov............x; na čerešni........ $\frac{x}{2}$; na jabloni............. $\frac{x}{3}$

na hruške.............. $\frac{x}{7}$

na slnečnici.................1

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7} + 1 = x \quad / \cdot 42$

$21x + 14x + 6x + 42 = 42x$
$41x + 42 = 42x$
$42 = x$

$Ľ(42) = \frac{42}{2} + \frac{42}{3} + \frac{42}{7} + 1 = 21 + 14 + 6 + 1 = 42$; $P(42) = 42$; $Ľ(42) = P(42)$

V kŕdli bolo $\boxed{42}$ vtáčikov.

3 ***Rieš nerovnice v množine reálnych čísel. Riešenie znázorni na číselnej osi.***

a) $3 \cdot (x+2) - 2 \cdot (4-x) > 8$

$3x + 6 - 8 + 2x > 8$
$5x - 2 > 8$
$5x > 10$
$x > 2$

−3 −2 −1 0 1 2 3 4

b) $\frac{7x+1}{4} \leq \frac{7x-1}{3} \quad / \cdot 12$

$21x + 3 \leq 28x - 4$
$7 \leq 7x$
$1 \leq x$

−3 −2 −1 0 1 2 3 4

4 ***Vyjadri zo vzorca pre výpočet elektrického prúdu*** $I = \frac{U}{R + R_v}$ ***neznámu*** R_v.

$R_v = \frac{U}{I} - R$

OPAKOVANIE II.

1 ***Rieš rovnice v množine celých čísel.***

a) $5 \cdot (2x - 6) = 3 \cdot (3 - 4x) + 5$

$10x - 30 = 9 - 12x + 5$
$22x = 44$
$x = 2$

b) $\frac{4x-3}{3} - \frac{3-x}{6} = \frac{5x+3}{2}$ $\;/ \cdot 6$

$8x - 6 - 3 + x = 15x + 9$
$9x - 9 = 15x + 9$
$-18 = 6x$
$-3 = x$

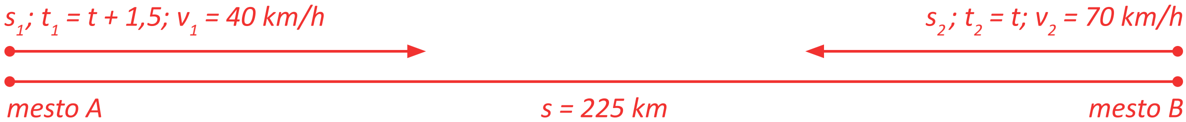
c) $2 - \frac{x-2}{x+2} = \frac{3}{2}$

$\frac{2x + 4 - x + 2}{x + 2} = \frac{3}{2}$
$4x + 8 - 2x + 4 = 3x + 6$
$2x + 12 = 3x + 6$
$x = 6$

podmienka: $x \neq -2$

2 ***O 7.00 h vyjde nákladné auto z mesta A rýchlosťou 40 km/h. Oproti nemu z mesta B vyjde o 8.30 h osobné auto rýchlosťou 70 km/h. Vzdialenosť miest A a B je 225 km. Kedy a kde sa stretnú obidve autá?***

vzdialenosť miesta stretnutia od mesta A – s_1
vzdialenosť miesta stretnutia od mesta B – s_2



$s_1 + s_2 = s$; $v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = s$; $40 \cdot (t + 1,5) + 70t = 225$; $t = 1,5$ h
$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 40 \cdot (1,5 + 1,5) = 120$ km

$s_1 + s_2 = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = 120 + 105 = 225$ km = s

Autá sa stretnú o $\boxed{1,5}$ hodiny vo vzdialenosti $\boxed{120}$ km od mesta A.

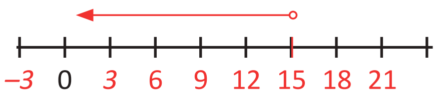
3 ***Rieš nerovnice v množine reálnych čísel. Riešenie znázorni na číselnej osi.***

a) $4 \cdot (2x - 3) - 1 \geq 3 \cdot (5 - 2x)$

$8x - 12 - 1 \geq 15 - 6x$
$8x - 13 \geq 15 - 6x$
$14x \geq 28$
$x \geq 2$

b) $\frac{x-1}{3} + \frac{2x-5}{2} < \frac{x}{2} + \frac{2x-1}{3}$ $\;/ \cdot 6$

$2x - 2 + 6x - 15 < 3x + 4x - 2$
$8x - 17 < 7x - 2$
$x < 15$



4 ***Vyjadri zo vzorca $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$ neznámu r.***

$r = \sqrt{\frac{3V}{2 \cdot \pi \cdot v}}$

VI. PODOBNOSŤ TROJUHOLNÍKOV

Podobnosť trojuholníkov

- trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom A'B'C' ($\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$) s pomerom podobnosti $k > 0$ práve vtedy, keď $|A'B'| = k \cdot |AB|$, $|A'C'| = k \cdot |AC|$, $|B'C'| = k \cdot |BC|$

Vety o podobnosti trojuholníkov

Veta sss

- dva trojuholníky sú podobné, ak pomery dĺžok každých dvoch zodpovedajúcich strán sa rovnajú

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k;\ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

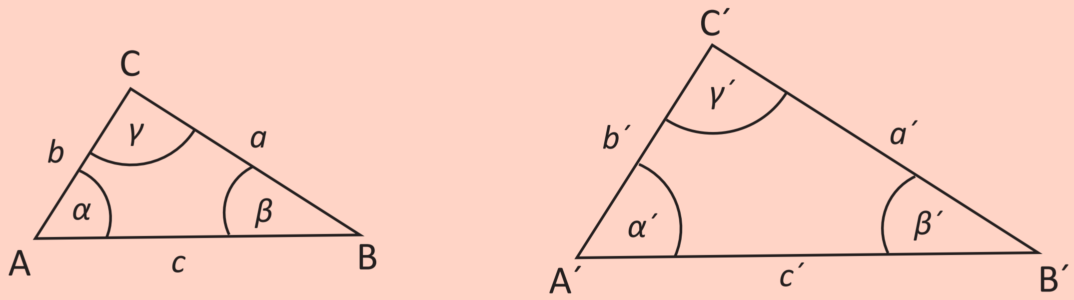
Veta sus

- dva trojuholníky sú podobné, ak sú rovnaké pomery dĺžok dvoch dvojíc zodpovedajúcich strán a ak sú zhodné uhly, ktoré tieto strany zvierajú

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k;\ \beta = \beta';\ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Veta uu

- dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch
  $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$; $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



Zväčšenie alebo zmenšenie v danom pomere

a) zväčšenie:
- pomer je väčší ako 1
  5 : 2 (5 : 2 > 1; pretože 5 >2)

b) zmenšenie:
- pomer je menší ako 1
  2 : 5 (2 : 5 < 1; pretože 2 < 5)

- zväčšiť alebo zmenšiť v pomere znamená zmeniť hodnotu v tomto pomere
- ak zväčšíme dané číslo v pomere, výsledné číslo musí byť väčšie ako dané číslo
- ak zmenšíme dané číslo v pomere, výsledné číslo musí byť menšie ako dané číslo

1 ***Pomer dĺžky a šírky obdĺžnika je 5 : 3. Koľko cm má kratšia strana, ak dlhšia strana má 7,5 cm?***

a = 7,5 cm; b = ?
a : b = 5 : 3; 7,5 cm : 5 = 1,5 cm; b = 3 · 1,5 cm = 4,5 cm

Kratšia strana obdĺžnika má dĺžku 4,5 cm.

2 ***Ján zmenil číslo 135 v pomere 7 : 5. Odpovedz na nasledujúce otázky:***

a) Bude zmenené číslo väčšie ako pôvodné? *Zmenené číslo bude väčšie ako pôvodné číslo.*

b) Aká bude jeho hodnota? *Jeho hodnota bude 189.*

135 : 5 . 7 = 189

c) V akom pomere zmenil Ján dané číslo, ak mu vyšlo číslo 15?

135 : 9 · 1 = 15 *Ján zmenil číslo 135 v pomere 1 : 9.*

3 ***Jakub nakreslil vlajku tvaru obdĺžnika s rozmermi 36 cm a 27 cm. Daliborovi sa zdala táto vlajka veľká. Rozhodol sa, že rozmery vlajky zmenší a nakreslí v pomere 2 : 9. Nakresli vlajku tak, ako ju nakreslil Dalibor.***

36 cm : 9 · 2 = 4 cm · 2 = 8 cm
27 cm : 9 · 2 = 3 cm · 2 = 6 cm
Vlajka má rozmery 8 cm × 6 cm.

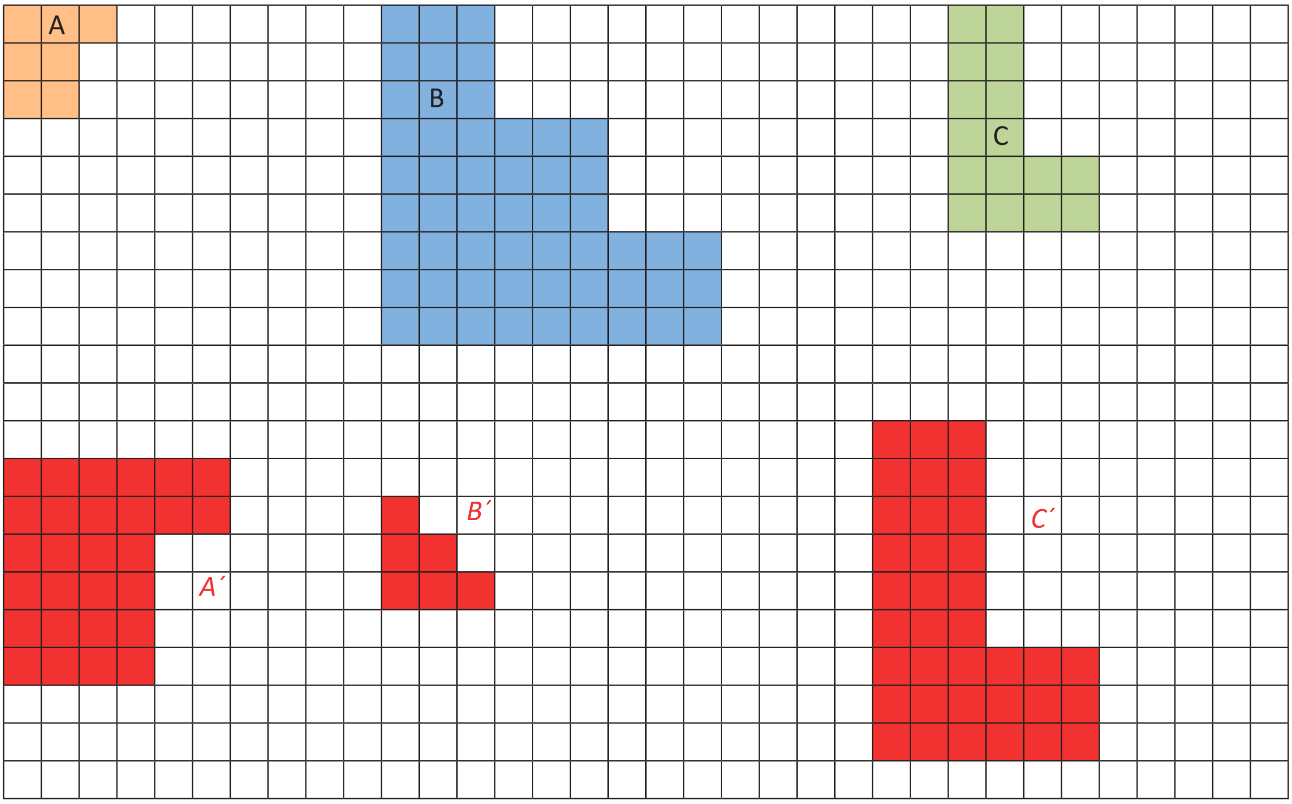
4 ***Na výstave modelov predstavovali konštruktéri modely z rôznych oblastí. Na obrázku je znázornený model Thunder Tiger v pomere podobnosti 1 : 8. Uveď, aké sú skutočné rozmery daného auta.***

Technické parametre
Dĺžka: 453 mm
Šírka: 295 – 305 mm
Rázvor: 315 – 320 mm

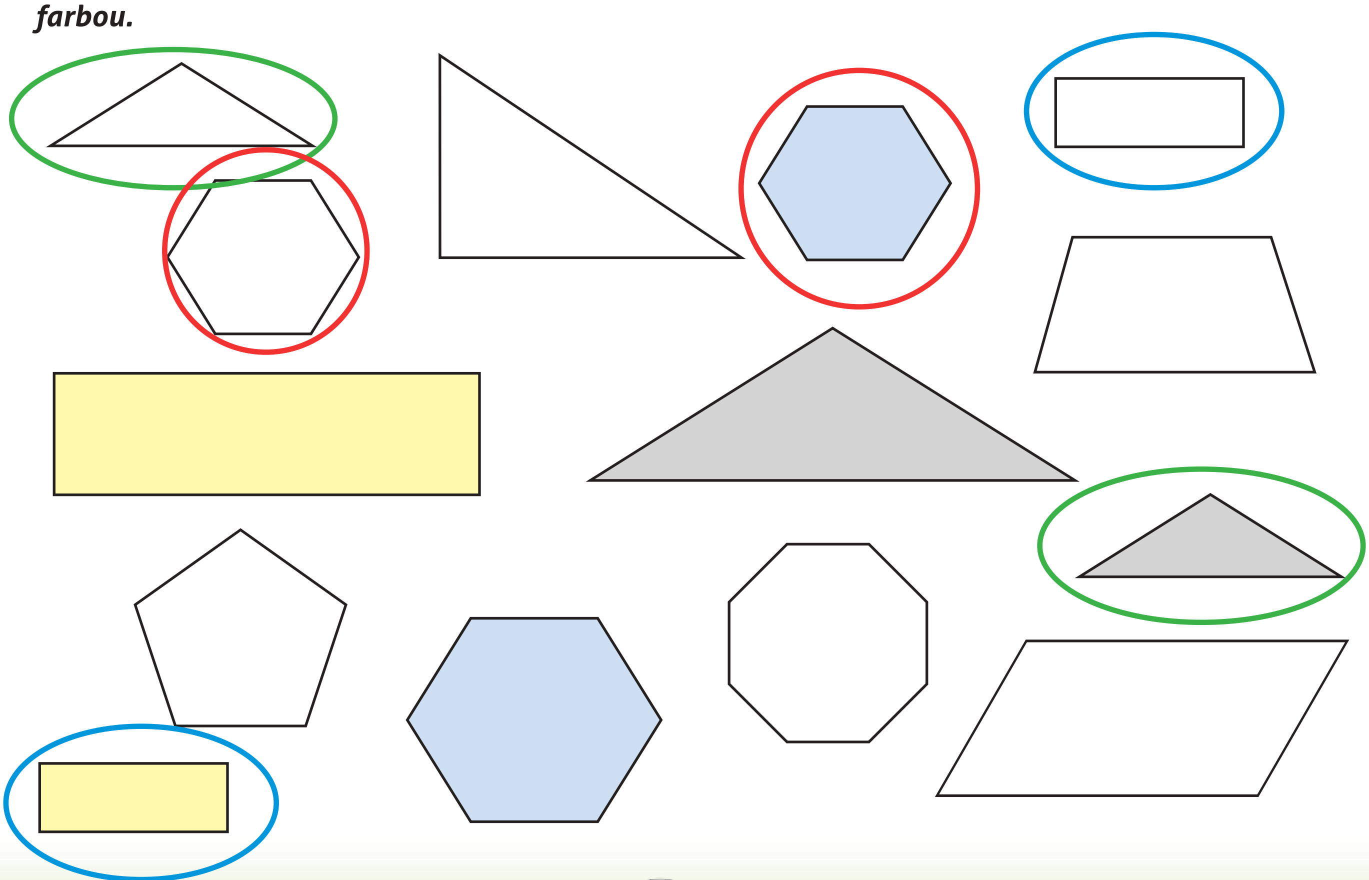
Skutočné rozmery Thunder Tiger sú:
dĺžka ... 3,624 m
šírka ... 2,36 m – 2,44 m
rázvor ... 2,52 m – 2,56 m

Výpočty:
453 mm · 8 = 3 624 mm = 3,624 m
295 mm · 8 = 2 360 mm = 2,36 m
305 mm · 8 = 2 440 mm = 2,44 m
315 mm · 8 = 2 520 mm = 2,52 m
320 mm · 8 = 2 560 mm = 2,56 m

5 ***V danej štvorcovej sieti uprav a narysuj dané útvary tak, že strany útvaru A zväčši dvojnásobne, strany útvaru B zmenši trojnásobne a strany útvaru C zväčši 1,5-krát.***



6 ***Dvojice podobných útvarov vyfarbi rovnakou farbou. Dvojice zhodných útvarov zakrúžkuj rovnakou farbou.***



7 ***Rozhodni, ktorá z kamarátok narysovala väčší útvar, ak obidve chceli zmeniť lichobežník s daným pomerom podobnosti.***

Beáta: „Pomer podobnosti môjho lichobežníka bol 1,8.“

Renáta: „Môj lichobežník som zmenila tak, že pomer podobnosti bol $\frac{7}{4}$.“ *7 : 4 = 1,75*

Väčší útvar narysovala *Beáta*.

8 ***Valec V má polomer podstavy r = 4 cm a výšku v = 8 cm. Urči výšku a polomer valcov V_1, V_2 a V_3, ak:***

a) valce V a V_1 sú podobné a pomer podobnosti k = 1 *V_1: r_1 = 4 cm; v_1 = 8 cm*

b) valce V a V_2 sú podobné a pomer podobnosti k = 1,5 *V_2: r_2 = 6 cm; v_2 = 12 cm*

c) valce V a V_3 sú podobné a pomer podobnosti k = 0,5 *V_3: r_3 = 2 cm; v_3 = 4 cm*

9 ***Zisti, či sú Δ ABC a Δ XYZ podobné. Ak áno, uveď podľa akej vety a zapíš pomer podobnosti (pozor na zodpovedajúce si strany). Pomôž si náčrtom v mierke 1 : 4.***

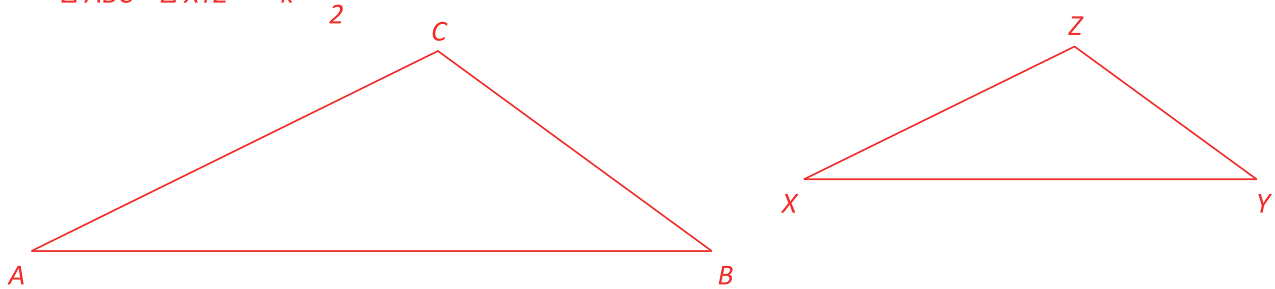
Δ ABC: a = 1,8 dm; b = 2,4 dm; c = 3,6 dm
Δ XYZ: x = 1,2 dm; y = 1,6 dm; z = 2,4 dm

$k = \frac{1,2}{1,8} = \frac{1,6}{2,4} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{2}{3}$; *Δ XYZ ~ Δ ABC podľa vety SSS s pomerom podobnosti* $k = \frac{2}{3}$

4-krát zmenšené ... Δ ABC ; a = 4,5 cm, b = 6 cm, c = 9 cm; Δ XYZ; x = 3 cm, y = 4 cm, z = 6 cm

Δ XYZ ~ Δ ABC $k = \frac{2}{3}$

Δ ABC ~ Δ XYZ $k = \frac{3}{2}$

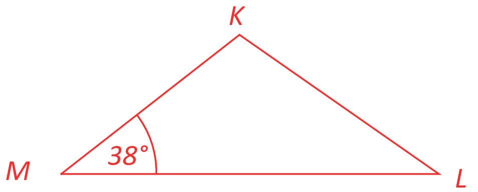


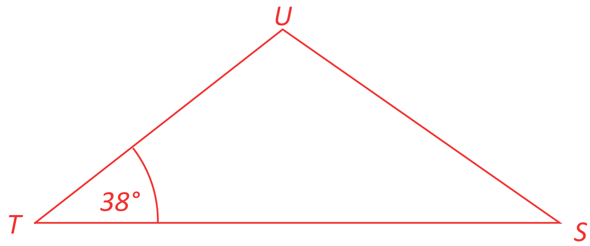
10 ***Zisti, či sú Δ KLM a Δ STU podobné. Ak áno, uveď podľa akej vety a zapíš pomer podobnosti (pozor na zodpovedajúce si strany).*** *aj vrcholy!*

Δ KLM: l = 6 cm; k = 1 dm; |∢KML| = 38°
Δ STU: s = 8,4 cm; u = 1,4 dm; |∢STU| = 38°

$k = \frac{1{,}4}{1} = \frac{0{,}84}{0{,}6} = 1{,}4$; |∢KML| = |∢UTS| = 38°; Δ KLM ~ Δ UST podľa vety SUS s pomerom podobnosti k = 1,4

zmenšené 2x!

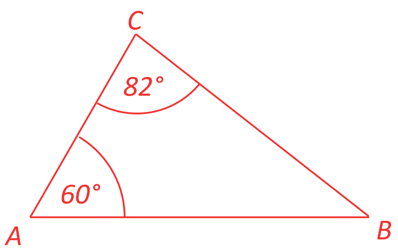


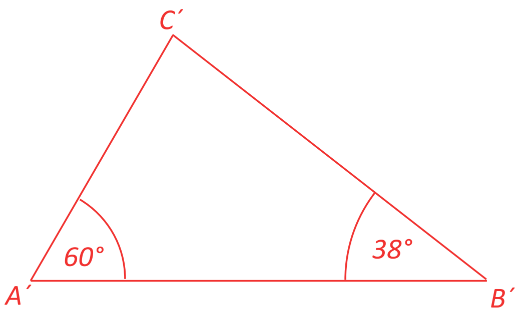


11 ***Zisti, či Δ ABC a Δ A´B´C´ sú podobné. Ak áno, uveď podľa akej vety.***

Δ ABC: |∢BAC| = 60°; |∢ACB| = 82°
Δ A´B´C´: |∢B´A´C´| = 60°; |∢ A´B´C´| = 38°

Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch.
|∢BAC| = |∢B´A´C´| = 60°; |∢ABC| = |∢A´B´C´| = 38°; Δ ABC ~ Δ A´B´C´ podľa vety UU





12 ***V Δ ABC poznáme veľkosti uhlov α = 42°, β = 37°. Urči veľkosti všetkých uhlov v trojuholníku A´B´C´, ak vieš, že Δ ABC a Δ A´B´C´ sú podobné.***

Ak Δ ABC a Δ A´B´C´ sú podobné, tak α = α’; β = β’ a γ = γ’
α’ = 42°; β’ = 37°; γ’ = 101°

13 ***Zisti, či sú dané trojuholníky podobné. Ak áno, urči pomer podobnosti a rozhodni, či ide o zmenšenie alebo zväčšenie.***

a) Δ ABC: a = 5 cm; b = 7 cm; c = 8 cm; Δ KLM: k = 16 cm; l = 10 cm; m = 14 cm

$k = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8} = 2$

Trojuholníky sú podobné; k = 2; ide o zväčšenie.

b) Δ IJK: i = 3 cm; j = 4 cm; k = 5 cm; Δ XYZ: x = 7,5 cm; y = 45 mm; z = 0,6 dm

Δ XYZ: x = 7,5 cm; y = 45 mm = 4,5 cm; z = 0,6 dm = 6 cm; $k = \frac{7{,}5}{5} = \frac{4{,}5}{3} = \frac{6}{4} = 1{,}5$

Trojuholníky sú podobné; k = 1,5; ide o zväčšenie.

c) Δ VLK: k = 48 mm; v = 5 cm; |∢VLK| = 50°; Δ DOM: d = 50 mm; o = 4,8 cm; |∢DOM| = 50°

Trojuholníky nie sú podobné; k = neexistuje; ide o rôzne trojuholníky.

d) Δ MNO: m = 2,5 m; |∢NMO| = 44°; |∢MNO| = 56°; Δ PRQ: q = 3 cm; |∢PRQ| = 56°; |∢RPQ| = 80°

Δ MNO: m = 2,5 m = 250 cm; |∢NMO| = 44°; |∢MNO| = 56°; |∢MON| = 80°

Δ PRQ: q = 3 cm; |∢PRQ| = 56°; |∢RPQ| = 80°; |∢PQR| = 44°; $k = \frac{3}{250} = 0{,}012$

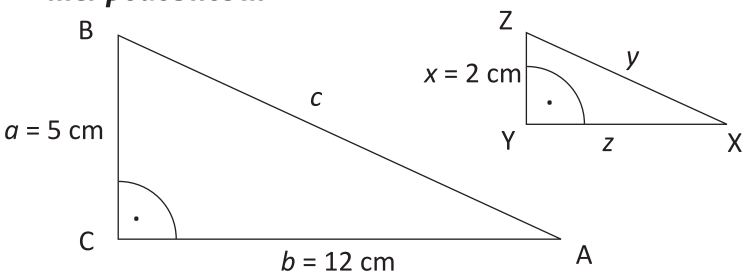
Trojuholníky sú podobné; k = 0,012; ide zmenšenie.

14 ***Vypočítaj obvod Δ KLM, ak vieš, že je podobný s Δ ABC, v ktorom a = 12 cm, b = 4,5 cm, c = 8,4 cm a pomer podobnosti je 3.***

o = a + b + c = 12cm + 4,5 cm + 8,4 cm = 24,9 cm
o´= 3 · 24,9 cm = 74,7 cm
k = 3 · 12 cm = 36 cm
l = 3 · 4,5 cm = 13,5 cm
n = 3 · 8,4 cm = 25,2 cm
(o´= k + l + m = 36 cm + 13,5 cm + 25,2 cm = 74,7 cm)

Obvod Δ KLM je 74,7 cm.

15 ***Dva trojuholníky ABC a XYZ sú podobné. Vypočítaj veľkosti neznámych strán trojuholníkov a urči pomer podobnosti.***



$k = \frac{x}{a} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$c = 13$ cm

$z = 12 \text{ cm} \cdot 0{,}4 = 4{,}8 \text{ cm}$

$y = 13 \text{ cm} \cdot 0{,}4 = 5{,}2 \text{ cm}$

Veľkosti strán: c = 13 cm; y = 5,2 cm; z = 4,8 cm; pomer podobnosti: k = 0,4.

16 ***Dva rovnoramenné trojuholníky majú pri vrchole oproti základni rovnaký uhol. Jeden z nich má základňu dĺžky 12 cm, rameno 9 cm. Dĺžka základne druhého trojuholníka je 16 cm. Aký je obvod trojuholníka so základňou 16 cm?***

$k = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$; *dĺžka ramena druhého trojuholníka* $= \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$ cm; $o = 16 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$

$o_1 = 12 \text{ cm} + 9 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$

$o_2 = k \,.\, o_1 = \frac{4}{3} \,.\, 30 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$

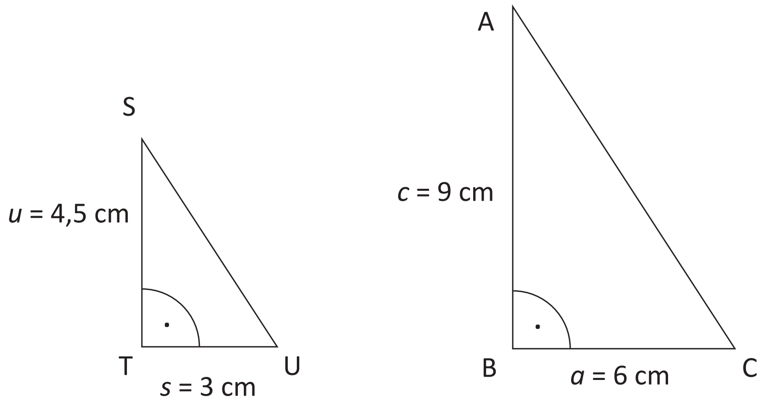
Obvod druhého trojuholníka je 40 cm.

17 ***V istom okamihu vrhá budova banky, ktorej výška je 22,5 m tieň, ktorého dĺžka je 15 m. Akú výšku má človek stojaci pred bankou, ktorého tieň je v tom istom okamihu 1,2 m?***

$k = \frac{1{,}2}{15} = 0{,}08$; *výška človeka :* $0{,}08 \cdot 22{,}5 \text{ m} = 1{,}8 \text{ m} = 180 \text{ cm}$

Človek stojaci pred bankou má výšku *1,8* m.

18 ***Vypočítaj obsahy pravouhlých trojuholníkov na obrázkoch.***



Obsah Δ STU: S_1 = (3 cm · 4,5 cm) : 2 = 6,75 cm²

Obsah Δ ABC: S_2 = (6 cm · 9 cm) : 2 = 27 cm²

a) Sú Δ STU a Δ ABC podobné?

Tieto trojuholníky sú podobné.

b) Aký je pomer podobnosti?

$k = \frac{6}{3} = \frac{9}{4{,}5} = 2$

c) V akom pomere sú obsahy týchto pravouhlých trojuholníkov?

27 cm² : 6,75 cm² = 4 : 1

19 ***Odmeraj rozmery vlajky Belgicka na obrázku. Vedľa nej narysuj vlajku s upravenými rozmermi tak, aby dĺžka bola 7,2 cm. Zisti šírku vlajky a zapíš, v akom pomere sú obe vlajky.***

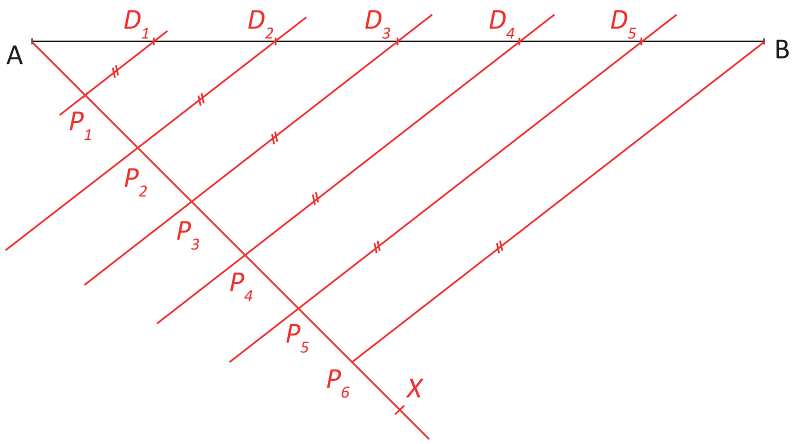
dĺžka vlajky na obrázku: a = 4 cm
šírka vlajky na obrázku: b = 3 cm
dĺžka upravenej vlajky: a´ = 7,2 cm
šírka upravenej vlajky... 1,8 . 3 cm = 5,4 cm
pomer podobnosti ... k = 7,2 cm : 4 cm = 5,4 cm : 3 cm = 1,8 : 1

20 ***Sekvoja vždyzelená je ihličnatý strom, ktorý rastie na západnom pobreží USA. Vo chvíli, keď tieň 1,8 m vysokého človeka je 1,08 m, vrhá sekvoja tieň dlhý 69 metrov. Aká vysoká je sekvoja?***

$k = \frac{69\ m}{1{,}08\ m} = \frac{575}{9}$; Sekvoja je vysoká: $\frac{575}{9} \cdot 1{,}8\ m = 115\ m$

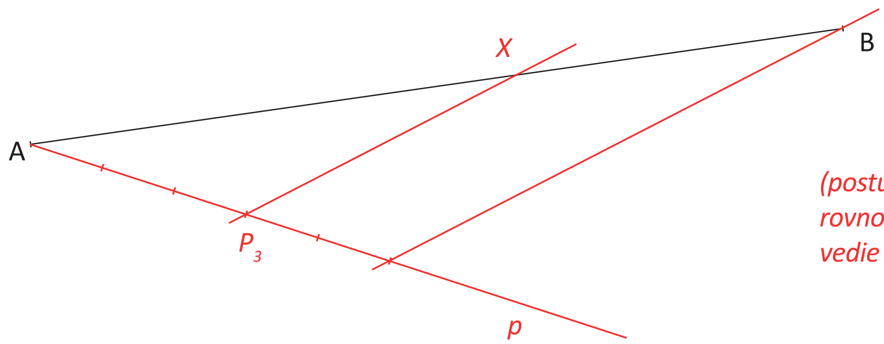
Sekvoja je vysoká $\boxed{115}$ m.

21 ***Rozdeľ úsečku AB na 6 rovnakých častí. Úlohu rieš graficky.***



1. Na pomocnej polpriamke $\overrightarrow{AX}$ nanesieme kružidlom 6x rovnaký (ľubovoľný) polomer s vyznačením priesečníkov kružnicových oblúkov a pomocnej polpriamky (napr. P_1, P_2...).
2. V poslednom bode P_6 zostrojíme úsečku P_6B.
3. V každom bode $P_1 - P_5$ zostrojíme rovnobežnú pomocnú priamku s úsečkou BP_6.
4. Každá rovnobežná priamka pretne úsečku AB a takto vzniknuté priesečníky (D_1, D_2...) sú ohraničením častí úsečky AB.

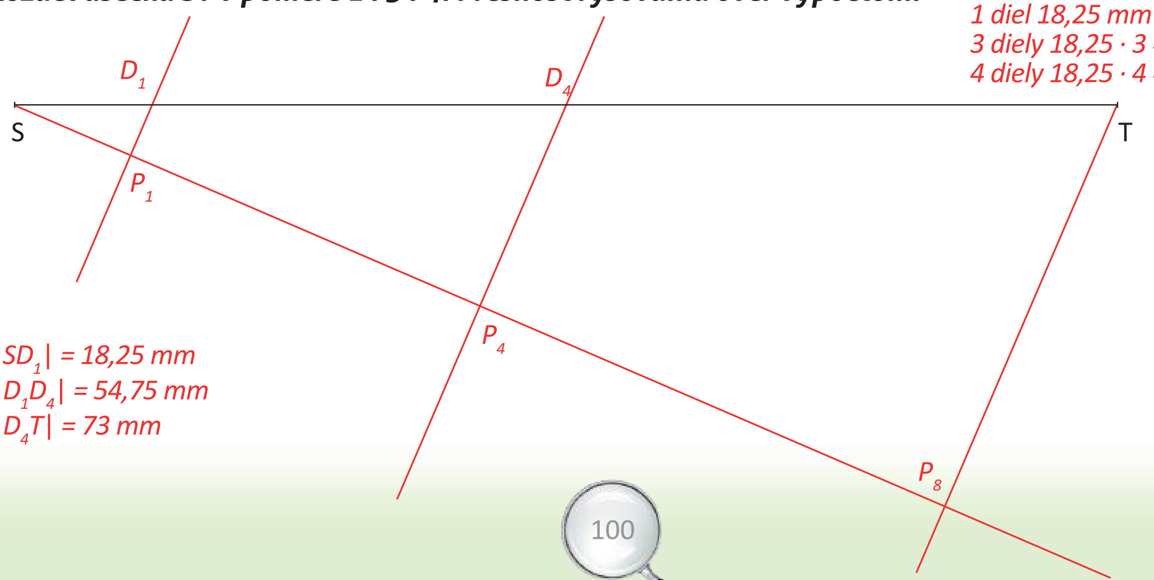
22 ***Rozdeľ úsečku AB v pomere 3 : 2 graficky.***



(postup analogický s úlohou 21, rovnobežku stačí viesť v bode P3, ktorý vedie k pomernému rozdeleniu úsečky AB)

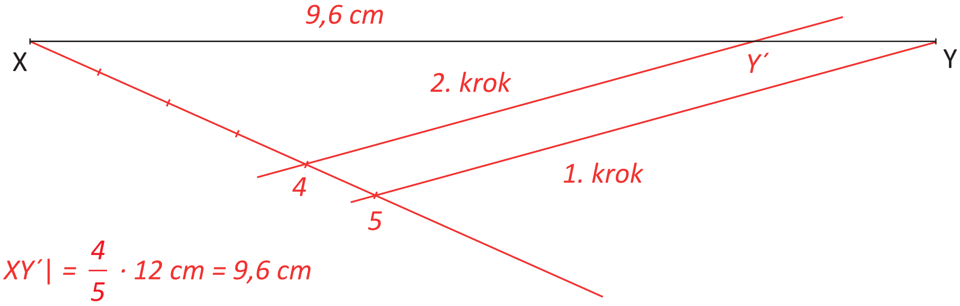
23 ***Rozdeľ úsečku ST v pomere 1 : 3 : 4. Presnosť rysovania over výpočtom.***

1 + 3 + 4 = 8 dielov
146 mm : 8 = 18,25 mm
1 diel 18,25 mm
3 diely 18,25 · 3 = 54,75 mm
4 diely 18,25 · 4 = 73 mm



$|SD_1| = 18{,}25$ mm
$|D_1D_4| = 54{,}75$ mm
$|D_4T| = 73$ mm

24 *Zmenši úsečku XY v pomere 4 : 5 graficky a výpočtom.*

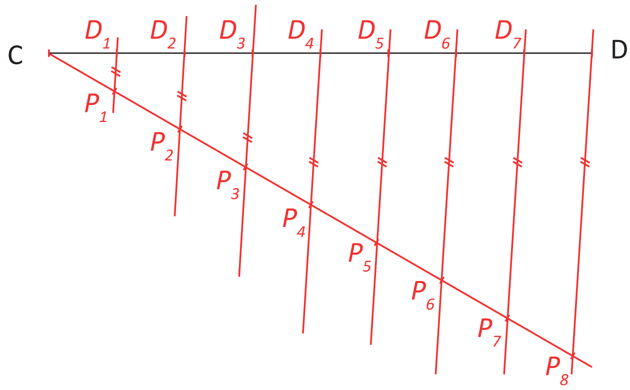


$|XY'| = \frac{4}{5} \cdot 12 \text{ cm} = 9{,}6 \text{ cm}$

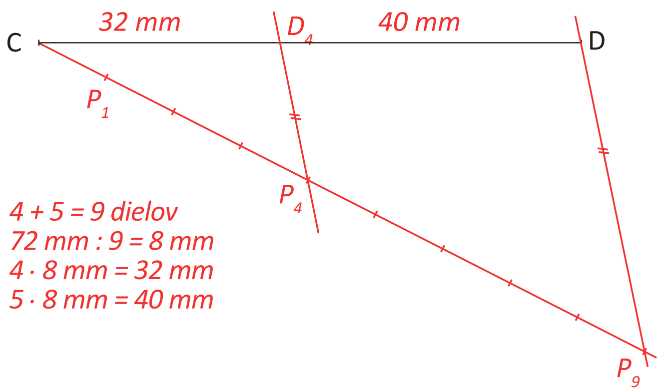
Zmenšená úsečka bude mať dĺžku 9,6 cm.

25 *Rozdeľ úsečku CD, ktorej dĺžka je 72 mm:*

a) na 8 rovnakých častí



b) v pomere 4 : 5



$4 + 5 = 9$ dielov
$72 \text{ mm} : 9 = 8 \text{ mm}$
$4 \cdot 8 \text{ mm} = 32 \text{ mm}$
$5 \cdot 8 \text{ mm} = 40 \text{ mm}$

26 *Martin má doma modely 4 mrakodrapov, resp. veží, ktoré sú zmenšené oproti skutočnosti v určitom pomere. Pomôž Martinovi zistiť skutočnú výšku každej budovy. Rozmery modelov sú v mm.*

$216 \text{ mm} \cdot 1\,500 = 324\,000 \text{ mm} = 324 \text{ m}$

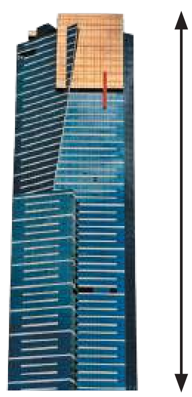
EIFFELOVA VEŽA

216

1 : 1 500

$99{,}1 \text{ mm} \cdot 3\,000 = 297\,300 \text{ mm} = 297{,}3 \text{ m}$

EUREKA TOWER

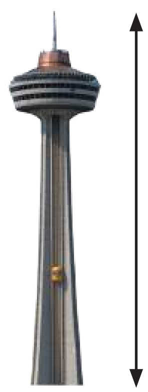


99,1

1 : 3 000

$79{,}25 \text{ mm} \cdot 2\,000 = 158\,500 \text{ mm} = 158{,}5 \text{ m}$

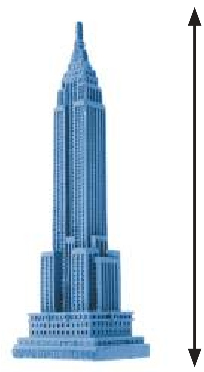
SKYLON TOWER



79,25

1 : 2 000

EMPIRE STATE BUILDING



76,2

1 : 5 000

$76{,}2 \text{ mm} \cdot 5\,000 = 381\,000 \text{ mm} = 381 \text{ m}$

OPAKOVANIE I.

1 ***Na mape v mierke 1 : 25 000 000 je vzdialenosť dvoch miest 3,8 cm. Vypočítaj skutočnú vzdušnú vzdialenosť týchto miest.***

A) 9,5 km B) 95 km *C) 950 km* D) 9 500 km

mapa je v mierke: 1 : 25 000 000, vzdialenosť miest na mape 3,8 cm
vzdialenosť miest v skutočnosti: 3,8 cm · 25 000 000 = 95 000 000 cm = 950 km

2 ***Vypočítaj veľkosti chýbajúcich strán v Δ KLM, ak vieš, že Δ KLM ~ Δ ABC, |AB| = 6 cm, |LM| = 9 cm, |MK| = 5 cm a pomer podobnosti je*** $k = \frac{7}{4}$.

Δ ABC: |AB| = 6 cm; |BC| = ?; |CA| = ?; Δ KLM: |LM| = 9 cm; |MK| = 5 cm; |KL| = ?

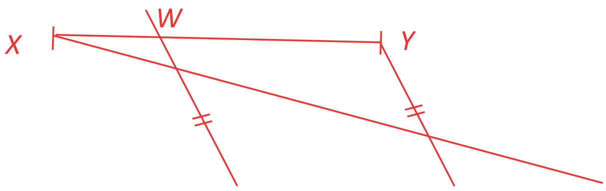
$k = \frac{7}{4}$

$|BC| = |LM| : k = 9\ cm : \frac{7}{4} = 9\ cm \cdot \frac{4}{7} = \frac{36\ cm}{7} = 5\frac{1}{7}\ cm$

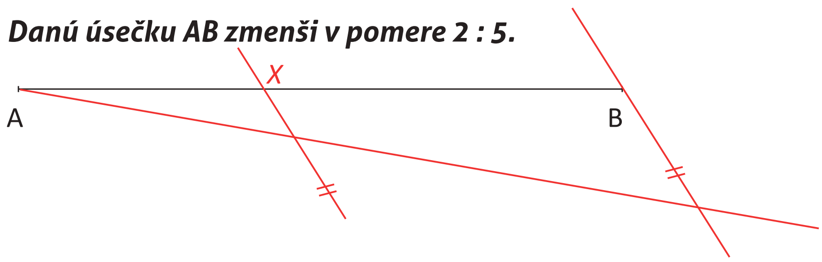
$|KL| = \frac{7}{4} \cdot |AB| = 10{,}5\ cm$

$|CA| = |MK| : k = 5\ cm : \frac{7}{4} = 5\ cm \cdot \frac{4}{7} = \frac{20\ cm}{7} = 2\frac{6}{7}\ cm$

3 ***Narysuj ľubovoľnú úsečku XY a rozdeľ ju v pomere 1 : 2.***



4 ***Danú úsečku AB zmenši v pomere 2 : 5.***



|AB| = 8 cm
$8\ cm \cdot \frac{2}{5} = 3{,}2\ cm$

Zmenšená úsečka bude mať dĺžku 3,2 cm.

5 ***Priama cesta rovnomerne stúpa každé 2 metre o 10 cm. O koľko metrov stúpne cesta na vzdialenosti 1 250 m?***

$k = \frac{1\,250\ m}{2\ m} = 625$; *cesta stúpne:* $x = k \cdot 0{,}1 = 625\ m \cdot 0{,}1 = 62{,}5\ m$

Cesta stúpne o *62,5* m.

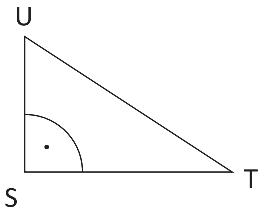
OPAKOVANIE II.

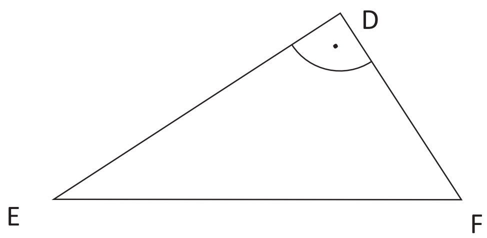
1 ***Vzdialenosť Martinovho a Petrovho domu je 750 m. Akou dlhou úsečkou bude táto vzdialenosť znázornená na pláne s mierkou 1 : 4 000?***

A) 187,5 cm B) 18,75 cm *C) 18,57 cm* D) 185,7 cm

Skutočná vzdialenosť: 750 m = 75 000 cm; vzdialenosť na pláne: 75 000 cm : 4 000 = 18,75 cm

2 ***Δ STU je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole S a Δ DEF je tiež pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole D. V týchto trojuholníkoch poznáme |∢TUS| = 52°32´ a |∢DFE| = 37°28´. Sú tieto trojuholníky podobné? Ak áno, rozhodni podľa ktorej vety.***





Δ STU: |∢TUS| = 52°32´; |∢UST| = 90°; |∢STU| = 37°28´
Δ DEF: |∢FED| = 37°28´; |∢EDF| = 90°; |∢EFD| = 52°32´
Tieto trojuholníky sú podobné podľa vety uu.

3 ***Obvod Δ ABC je 15 cm. Tento trojuholník je podobný s Δ TUV, s pomerom podobnosti 2,5. Vypočítaj obvod Δ TUV.***

Δ ABC: o = 15 cm; Δ TUV: o_1 = ?; k = 2,5; $o_1 = k \cdot o$; $o_1 = 2{,}5 \cdot 15$ cm = 37,5 cm

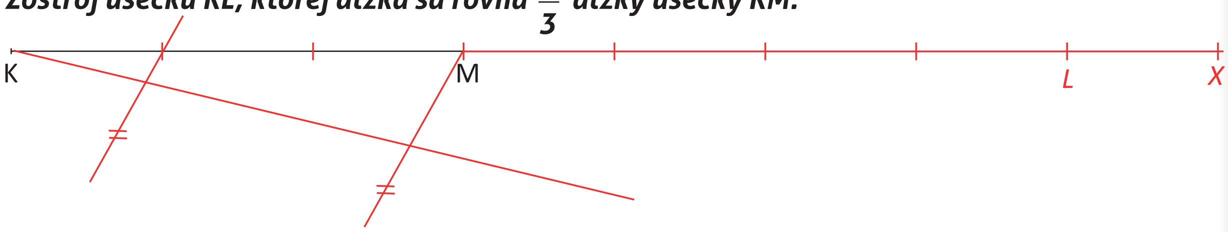
Obvod Δ TUV je 37,5 cm.

4 ***Človek vysoký 185 cm vrhá v istom čase tieň dlhý 150 cm. Bude stĺp elektrického osvetlenia vyšší ako 36 m, ktorého tieň v tom istom čase je dlhý 22,5 m?***

Stĺp elektrického osvetlenia: t_s = 22,5 m; v_s = ?
Človek: $t_č$ = 150 cm = 1,5 m; $v_č$ = 185 cm = 1,85 m
$t_s = k \cdot t_č$; $k = t_s : t_č$ = 22,5 m : 1,5 m = 15; $v_s = k \cdot v_č = 15 \cdot 1{,}85$ m = 27,75 m

Stĺp elektrického osvetlenia *nebude* vyšší ako 36 m.

5 ***Zostroj úsečku KL, ktorej dĺžka sa rovná $\frac{7}{3}$ dĺžky úsečky KM.***



Zväčšená úsečka KL bude mať dĺžku 14 cm.

VII. ŠTATISTIKA

Úlohou štatistiky je podávať informácie na základe spracovania údajov.

Základné pojmy v štatistike

- štatistický súbor: skupina predmetov, vecí, ktoré sú zhromaždené na základe ich spoločných vlastností alebo znakov
- štatistická jednotka: základný prvok štatistického súboru
- rozsah súboru: počet všetkých prvkov štatistického súboru
- štatistický znak: spoločná vlastnosť jednotlivých prvkov súboru, ktorého zmeny sú predmetom skúmania
- štatistické vyšetrovanie: výskum, vyšetrovanie hodnôt znaku a ich spracovanie danými štatistickými metódami
- štatistická tabuľka: prehľadne uvedené údaje zo štatistického prieskumu
- štatistické zobrazenie údajov: stĺpcový diagram, kruhový diagram
- početnosť javu:

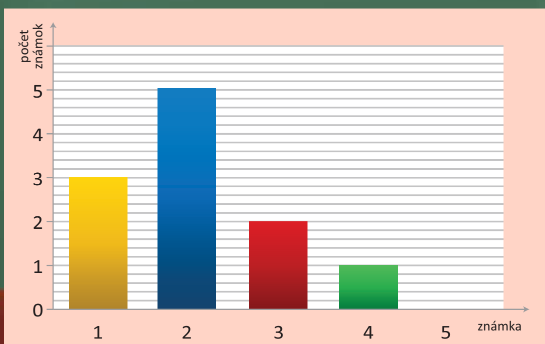
a) absolútna početnosť
- počet jednotiek, pri ktorých znak nadobúda tú istú hodnotu
- súčet absolútnych početností je rovný rozsahu súboru

b) relatívna početnosť
- pomer absolútnej početnosti a rozsahu súboru vyjadrený v percentách
- súčet relatívnych početností je rovný 100 %

ŠTATISTICKÝ SÚBOR	ŠTATISTICKÁ JEDNOTKA	ŠTATISTICKÝ ZNAK
všetky hody hracou kockou	jednotlivé hody kockou	čísla, ktoré padli na kocke
všetky hody mincou	jednotlivé hody mincou	znak alebo číslo pri minci
všetky deti v škole	jednotlivé deti	vek detí
všetky známky z previerky	jednotlivé známky	hodnota známky

Úloha

Štatisticky spracuj dosiahnuté známky žiakov z matematiky.
- štatistická jednotka: 1, 2, 3, 4, 5 (päť rôznych známok)
- štatistický súbor: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4 (známky žiakov z matematiky)
- rozsah súboru: 11 (počet známok spolu)



ŠTATISTICKÁ JEDNOTKA (ZNÁMKA)	ABSOLÚTNA POČETNOSŤ	RELATÍVNA POČETNOSŤ
1	3	$\frac{3}{11}$ = 0,27 = 27 %
2	5	$\frac{5}{11}$ = 0,46 = 46 %
3	2	$\frac{2}{11}$ = 0,18 = 18 %
4	1	$\frac{1}{11}$ = 0,09 = 9 %
5	0	$\frac{0}{11}$ = 0,00 = 0 %

1 ***Nasledujúce údaje správne roztrieď do skupín.***

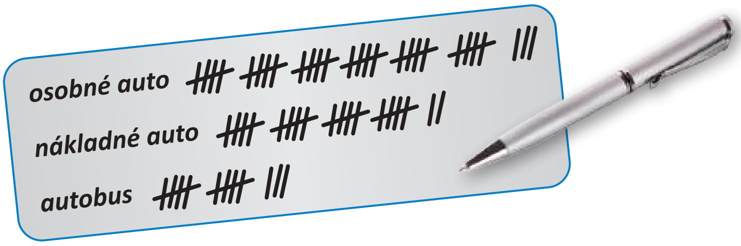
Všetky osobné autá v našej obci.; Viac ako 50-ročný.; Býva od školy aspoň 1 km.; Pán Kováč.; Získal aspoň 5 bodov.; Všetci obyvatelia nášho domu.; Každý obyvateľ Slovenska.; Všetky okná na našej škole.; Auto modrej farby.; Náš pes.; Rodiny v našej obci.; Má počítač.

a) Štatistický súbor: *Všetky osobné autá v našej obci.; Všetci obyvatelia nášho domu.; Každý obyvateľ Slovenska.; Všetky okná na našej škole.; Rodiny v našej obci.*

b) Štatistická jednotka: *Pán Kováč.; Náš pes.; Auto modrej farby.*

c) Štatistický znak: *Viac ako 50-ročný; Býva od školy aspoň 1 km.; Získal aspoň 5 bodov.; Má počítač.*

2 ***Žiaci základnej školy sa podieľali na zaujímavom projekte, ktorý mal vyhodnotiť vyťaženosť hlavnej cesty počas 1 hodiny. Hodnotili, ako často prejde po ceste osobné auto, nákladné auto alebo autobus. Na základe údajov z pozorovania doplň tabuľku.***



TYP VOZIDLA	POČET PREJAZDOV ABSOLÚTNE	POČET PREJAZDOV PERCENTUÁLNE
Osobné	*33*	*48,52 ≐ 49*
Nákladné	*22*	*32,35 ≐ 32*
Autobus	*13*	*19,12 ≐ 19*

3 ***Písomnú prácu z biológie písalo všetkých 35 žiakov triedy. Výsledky písomnej práce sú zhrnuté v tabuľke. Doplň tabuľku a vypočítaj priemer známok z písomnej práce v triede.***

ZNÁMKA	1	2	3	4	5
Početnosť	5	*8*	12	*7*	*3*
Relatívna početnosť	$\frac{5}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{7}{35}$	$\frac{3}{35}$

$$\bar{x} = \frac{5\cdot1+8\cdot2+12\cdot3+7\cdot4+3\cdot5}{35} = 2{,}857 \doteq 2{,}86$$

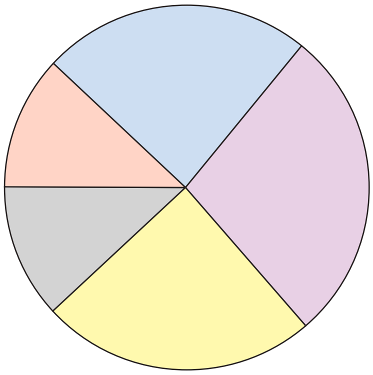
Priemer známok z písomnej práce je $\boxed{2{,}86}$.

4 ***Žiaci IX. A a IX. B triedy písali polročný test z matematiky. Známku 4 malo 25 % žiakov IX. A triedy a známku 3 malo 28 % žiakov IX. B triedy. Všetky ostatné potrebné údaje sú zaznamenané v tabuľke.***

a) Doplň tabuľku.

ZNÁMKA	1	2	3	4	5	SPOLU
IX. A	3	5	*4*	*5*	3	20
IX. B	3	6	*7*	*6*	3	25
Relatívna početnosť známok IX. B [%]	*12*	*24*	*28*	*24*	*12*	*100*
pomôcka: veľkosť stredového uhla výseku	*43°*	*86°*	*100°*	*86°*	*43°*	

b) Nakresli kruhový diagram relatívnej početnosti známok z testu z matematiky žiakov IX. B triedy.



priemerná známka IX. A triedy

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{20} = 3$$

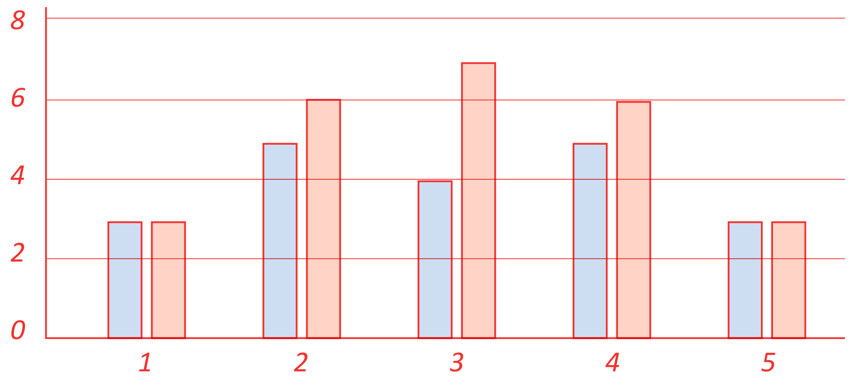
priemerná známka IX. B triedy

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{25} = 3$$

c) Ktorá trieda dosiahla lepší výsledok z testu z matematiky?

Z testu z matematiky dosiahli obidve triedy rovnaký výsledok s priemernou známkou 3.

d) Nakresli stĺpcový diagram, ktorý porovnáva výsledky testu žiakov IX. A a IX. B triedy.



5 ***Na škole v Bratislave, kde prebiehala súťaž v materinskom jazyku, Karin dosiahla percentil 92. Znamenalo to, že 92 % súťažiacich, ktorí sa do súťaže zapojili, dosiahlo horší výsledok ako Karin. Do súťaže sa celkovo zapojilo 1 325 súťažiacich. Koľko súťažiacich malo horší výsledok ako Karin?***

A) 106 B) 1 291 C) 1 243 *D) 1 219*

1 325 · 0,92 = 1 219

6 ***Na matematickej súťaži postúpilo do finále 5 družstiev. Výsledky finále sú v tabuľke. Maximálny počet bodov za každú úlohu bol 10. Do tabuľky doplň výsledné umiestnenie družstiev a percentuálnu úspešnosť družstiev v jednotlivých úlohách.***

ČÍSLO ÚLOHY		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	SUMA	UMIESTNENIE
DRUŽSTVÁ	A	10	7	9	8	3	8	7	7	8	9	*76*	*3. – 4.*
	B	8	8	8	7	7	9	7	4	10	6	*74*	*5.*
	C	9	3	8	9	8	6	9	10	7	7	*76*	*3. – 4.*
	D	7	8	9	10	8	6	8	5	9	8	*78*	*1.*
	E	8	7	8	9	9	5	7	10	5	9	*77*	*2.*
	Spolu	*42*	*33*	*42*	*43*	*35*	*34*	*38*	*36*	*39*	*39*	*381*	
Úspešnosť [%]		*84*	*66*	*84*	*86*	*70*	*68*	*76*	*72*	*78*	*78*		

a) Koľko bodov získalo priemerne jedno družstvo?

$\bar{x} = \frac{381}{5} = 76{,}2$

Jedno družstvo získalo priemerne 76,2 bodov.

b) Ktoré družstvá dosiahli nadpriemerné a ktoré podpriemerné výsledky?

Nadpriemerné výsledky: D, E; podpriemerné výsledky: A, B, C.

c) Ktorá úloha bola podľa počtu získaných bodov pre žiakov najnáročnejšia a ktorá, naopak, najmenej náročná?

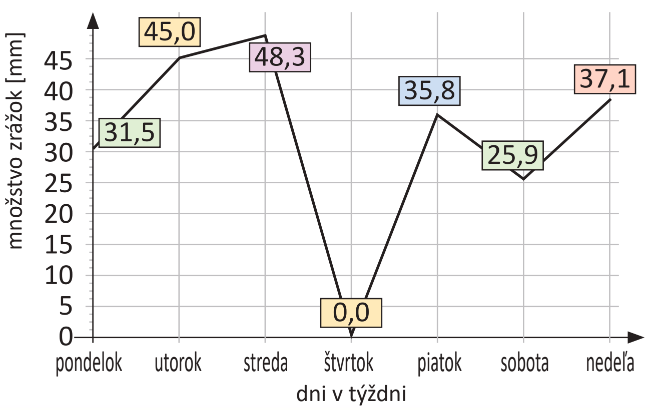
Pre žiakov bola najnáročnejšia úloha č. 2 a najmenej náročná úloha č. 4.

7 ***Anna, Leo, Peter, Lenka a Martin boli hrať bowling. Počet bodov, ktoré získali v dvoch hrách, je uvedený v tabuľke. Do tabuľky doplň, aký bol priemerný počet bodov dosiahnutý v prvej hre a koľko bodov získal Martin v druhej hre. Ktorý z hráčov získal spolu v oboch hrách najväčší počet bodov?***

	ANNA	LEO	PETER	LENKA	MARTIN	PRIEMER BODOV
1. hra	125	120	95	92	108	*108*
2. hra	85	115	100	103	*97*	100

Najväčší počet bodov získal/-a *Leo* .

8 ***Spojnicový graf na obrázku znázorňuje namerané hodnoty zrážok od 7. októbra do 13. októbra 2012 na meteorologickej stanici Svit. Koľko l zrážok spadlo za uvedené obdobie priemerne za deň na m²?***

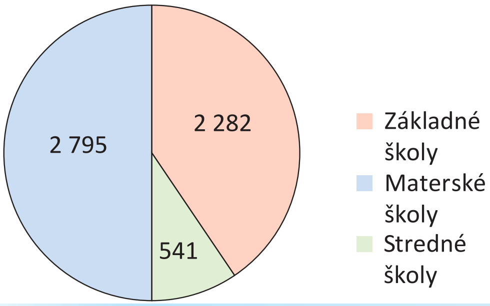


$\bar{x} = \frac{31{,}5 + 45 + 48{,}3 + 0 + 35{,}8 + 25{,}9 + 37{,}1}{7} = 31{,}94$

Za deň spadlo na m² priemerne *31,94* l zrážok.

VII. ŠTATISTIKA

9 ***Kruhový diagram zobrazuje v istom období počet štátnych škôl na Slovensku. Zisti odpovede na nasledujúce otázky.***



a) Aká je početnosť štátnych škôl? *5 618*

2 795 + 2 282 + 541 = 5 618

b) Akých škôl je najmenej? *stredných*

c) O koľko je menej základných škôl ako materských? *513*

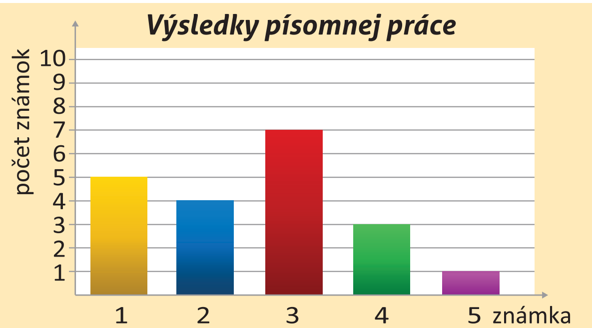
2 795 – 2 282 = 513

d) Aká je relatívna početnosť materských škôl? *49,75 %*

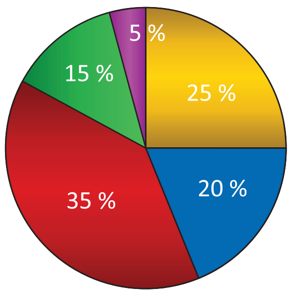
(2 795 : 5 618) · 100 = 49,75

10 ***Na základe zobrazených diagramov z hodnotenia písomnej práce z podobnosti trojuholníkov v triede IX. A odpovedz na otázky.***

Vyjadrenie počtu známok



Percentuálne zastúpenie známok



a) Koľko žiakov dostalo dvojku? *4*

b) Koľko žiakov písalo písomnú prácu? *20*

c) Ktorú známku dostalo najviac žiakov? *3*

d) Akú známku predstavuje v kruhovom diagrame žltá farba? *Jednotku (výborný)*

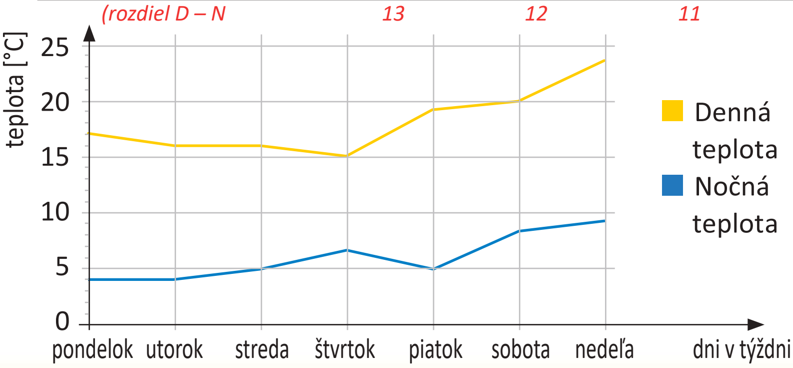
e) Akú známku dostalo 20 % žiakov? *Dvojku (chválitebný)*

f) Bolo viac jednotkárov alebo štvorkárov spolu s päťkármi? *Jednotkárov*

g) Aká je priemerná známka z písomnej práce? *2,55*

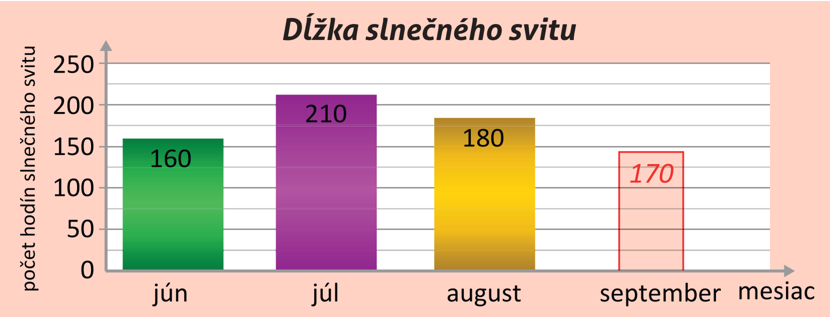
11 ***Slovenský hydrometeorologický ústav (SHMÚ) uvádza v spojnicovom grafe predpovede teploty na jeden týždeň. Na základe uvedeného grafu doplň štatistickú tabuľku. Vypočítaj priemernú dennú a priemernú nočnú teplotu tohto týždňa. Ktorý deň v týždni predstavuje najmenší teplotný rozdiel medzi dennou a nočnou teplotou a zisti o koľko °C sa líši od priemernej nočnej teploty. Ktorý deň v týždni predstavuje najväčší teplotný rozdiel medzi dennou a nočnou teplotou a zisti o koľko °C sa líši od priemernej dennej teploty.***

TEPLOTA	PONDELOK	UTOROK	STREDA	ŠTVRTOK	PIATOK	SOBOTA	NEDEĽA
Denná teplota [°C]	*17*	*16*	*16*	*15*	*19*	*20*	*23*
Nočná teplota [°C]	*4*	*4*	*5*	*7*	*5*	*8*	*9*
(rozdiel D – N	*13*	*12*	*11*	*8*	*14*	*12*	*14)*



Priemerná denná teplota je 18 °C, priemerná nočná teplota je 6 °C. Najmenší teplotný rozdiel medzi dennou a nočnou teplotou je vo štvrtok (8° C) a líši sa o 2° C od priemernej nočnej teploty. Najväčší teplotný rozdiel medzi dennou a nočnou teplotou je v piatok a v nedeľu (14° C) a líši sa o 4 ° C od priemernej dennej teploty.

12 ***Priemerný počet hodín slnečného svitu v mesiacoch jún – september 2012 v našom mestečku bol 180 hodín. Koľko hodín trval v septembri? Vypočítaný údaj doplň do stĺpcového diagramu.***

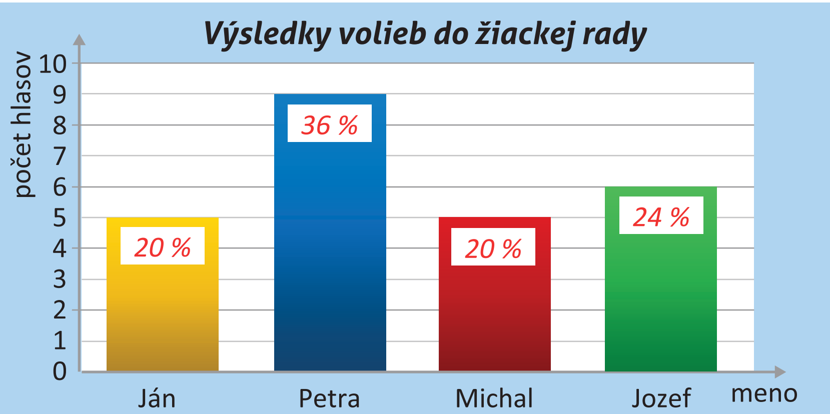


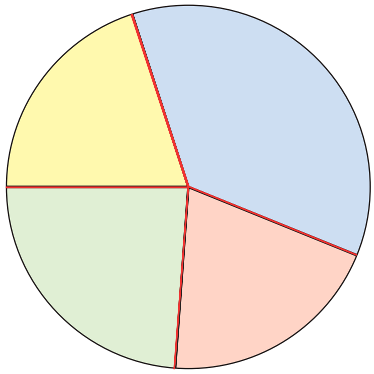
$\frac{160 + 210 + 180 + x}{4} = 180$

$x = 180 . 4 - (160 + 210 + 180)$
$x = 720 - 550$
$x = 170$

Slnečný svit v septembri trval 170 hodín.

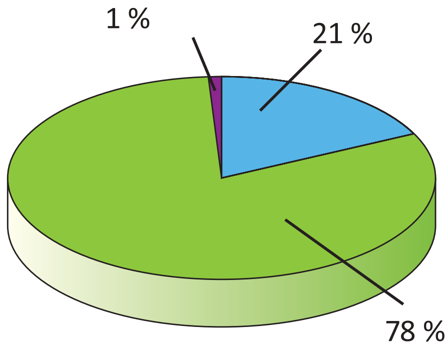
13 ***Výsledky volieb zástupcu IX. B triedy do žiackej rady sú zobrazené v stĺpcovom diagrame. Do prázdnych políčok doplň percentuálne výsledky jednotlivých kandidátov a nakresli aj kruhový diagram. O koľko percent sa líšia výsledky jednotlivých zástupcov od priemeru výsledkov volieb?***



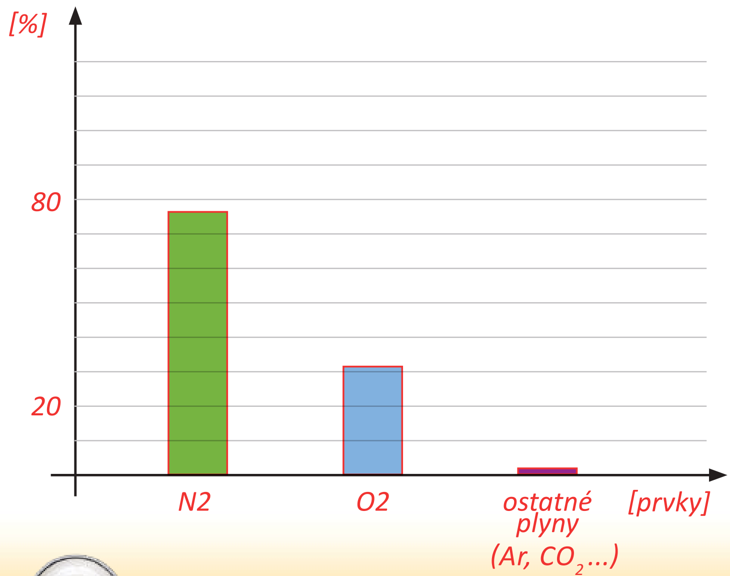


Ján: (5 : 25) · 100 = 20 % ; Petra: (9 : 25) · 100 = 36 %; Michal: (5 : 25) · 100 = 20 %; Jozef: (6 : 25) · 100 = 24 %
veľkosť stredového uhla výseku v grafe: Ján: 72°; Petra: 130°; Michal: 72°; Jozef: 86°
rozdiel výsledku od priemeru Ján – 5 %; Petra + 11 %; Michal – 5 %; Jozef – 1 %

14 ***Kruhový diagram znázorňuje zloženie vzduchu. Doplň správne legendu zodpovedajúcich plynov. Vytvor stĺpcový diagram zloženia vzduchu.***



- *dusík*
- *kyslík*
- *ostatné plyny (argón, oxid uhličitý...)*



15 ***Zrealizuj vo svojej triede štatistický prieskum prijatia žiakov na strednú školu, ktorú uviedli na prihláške ako prvú v poradí. Štatistickým znakom budú typy stredných škôl: gymnázium, stredná odborná škola, konzervatórium. Výsledky prieskumu spracuj do tabuľky, ktorá obsahuje početnosť, absolútnu a relatívnu početnosť jednotlivých javov. Nakresli kruhový diagram relatívnej početnosti v percentách.*** *samostatná / skupinová / spoločná práca žiakov*

16 ***Vyhľadaj na internete rozlohu a počet obyvateľov vybraných štátov Európy a doplň tabuľku. Vypočítaj, aká je hustota zaľudnenia jednotlivých štátov a výsledky znázorni stĺpcovým diagramom. Ktorý z daných štátov má najväčšiu hustotu zaľudnenia?***

ŠTÁT	SLOVENSKO	ČESKO	MAĎARSKO	POĽSKO	RAKÚSKO
Rozloha [km²]	*48 845*	*78 866*	*93 030*	*312 685*	*83 858*
Počet obyvateľov	*5 554 324*	*10 256 760*	*10 075 034*	*38 625 478*	*8 169 929*
Hustota zaľudnenia [počet obyv./km²]	*111*	*130,1*	*108,3*	*123,5*	*97,4*

Najväčšiu hustotu zaľudnenia má *Česko* .

OPAKOVANIE I.

1 ***V tabuľke sú uvedené ceny zmrzliny (dávka – 2 kopčeky) vo vybraných letoviskách.***

LETOVISKO	CENA (€)	ODCHÝLKA
Kanárske ostrovy	8,00	*+2,2*
Mallorca	6,00	*+0,2*
Neapol	4,50	*-1,3*
Benátky	7,40	*+1,6*
Split	5,00	*-0,8*
Istanbul	6,50	*+0,7*
Varna	4,40	*-1,4*
Larnaca (Cyprus)	5,00	*-0,8*
Antalya	5,40	*-0,4*

a) Vypočítaj priemernú cenu dvojkopčekovej zmrzliny.

$\overline{x} = \frac{(8 + 6 + 4{,}50 + 7{,}40 + 5 + 6{,}50 + 4{,}40 + 5 + 5{,}40)}{9}$

$\overline{x} = \frac{52{,}20}{9}$; $x = 5{,}8$

b) Vypočítaj odchýlku od priemernej ceny a zapíš hodnoty do 3. stĺpca v tabuľke.

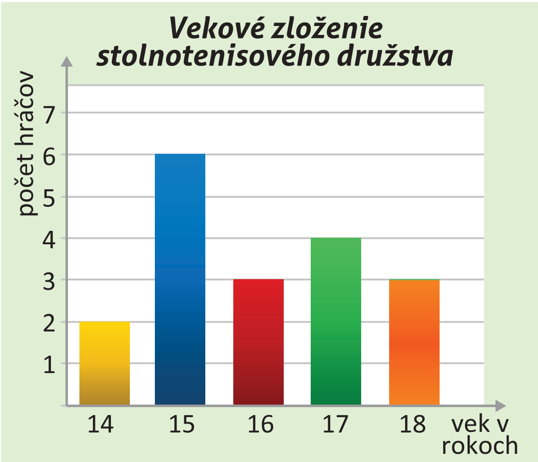
8 – 5,8 = 2,2
6 – 5,8 = 0,2
5,8 – 4,5 = 1,3
7,4 – 5,8 = 1,6
6,50 – 5,8 = 1,7

5,8 – 5 = 0,8
5,8 – 4,4 = 1,4
5,8 – 5 = 0,8
5,8 – 5,4 = 0,4

2 ***Dané sú údaje o počte detí v dvadsiatich rodinách: 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 3, 4, 1, 0, 0, 1, 1, 2. Usporiadaj údaje do tabuľky početností.***

POČET DETÍ	ABSOLÚTNA POČETNOSŤ	RELATÍVNA POČETNOSŤ	RELATÍVNA POČETNOSŤ [%]
0	6	0,3	30
1	*7*	*0,35*	*35*
2	*5*	*0,25*	*25*
3	*1*	*0,05*	*5*
4	*1*	*0,05*	*5*

3 ***Diagram ukazuje vekové rozloženie a počty hráčov stolného tenisu v družstve. Koľko hráčov má toto družstvo? Aký je ich priemerný vek? Ak by do družstva prišli dvojičky Tomáš a Tibor, bol by vekový priemer družstva 16,2 rokov. Koľko rokov majú dvojičky?***



Priemerný vek:

$\overline{x} = \frac{2 \cdot 14 + 6 \cdot 15 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 17 + 3 \cdot 18}{18} = 16$

Dvojičky:

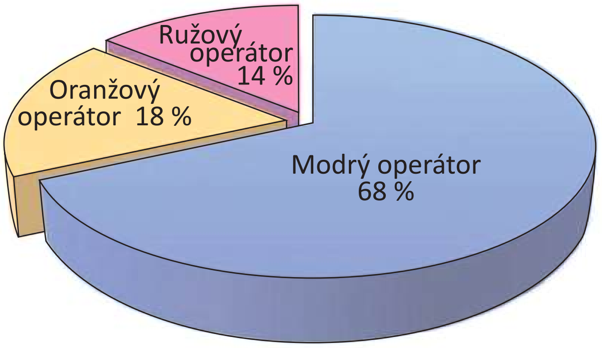
$\frac{2 \cdot 14 + 6 \cdot 15 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 17 + 3 \cdot 18 + 2 \cdot x}{20} = 16{,}2$

x = [(20 . 16,2) - (2 . 14 + 15 . 6 + 16 . 3 + 17 . 4 + + 18 . 3)] : 2 = (324 - 288) : 2 = 36 : 2 = 18

Družstvo má 18 hráčov.
Ich priemerný vek je 16 rokov.
Dvojičky majú 18 rokov.

OPAKOVANIE II.

1 ***Výsledky internetového a SMS hlasovania o najlepšieho mobilného operátora sú znázornené v kruhovom diagrame na obrázku. Spokojní zákazníci spoločnosti Oranžový operátor poslali do ankety celkovo 3 150 hlasov.***



(3 150 · 100) : 18 = 17 500 – celkovo 100 %

Víťaz tejto ankety, Modrý operátor získal: 0,68 · 17 500 = 11 900 hlasov

a) Koľko hlasov získal víťaz tejto ankety, Modrý operátor? *Víťaz získal 11 900 hlasov.*

b) Koľko hlasov prišlo celkovo do ankety? *Celkovo prišlo do ankety 17 500 hlasov.*

2 ***Žiaci súťažili v streľbe zo vzduchovky. Výsledky streľby sú uvedené v tabuľke.***

MENO	ZÍSKANÉ BODY				
Peter	1	7	3	5	8
Juraj	6	4	7	2	8
Erik	3	8	4	8	10
Andrej	7	5	10	8	10

Do bodového kruhu 10 trafili 3-krát = (3 · 100) : 20 = 15 % z celkového počtu striel. Najčastejšie zasiahli bodový kruh 8, a to 5-krát = = (5 · 100) : 20 = 25 % z celkového počtu striel.

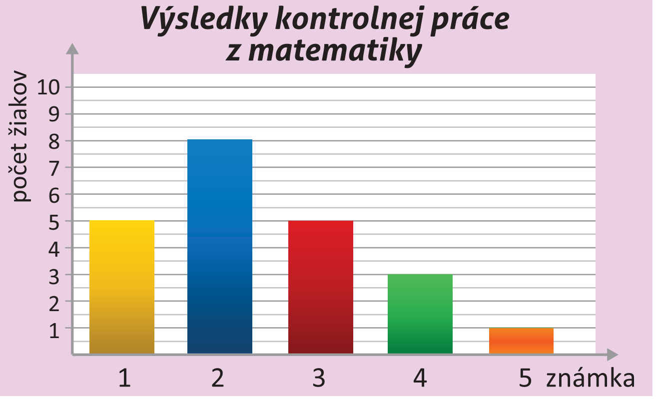
a) Koľko bodov získali žiaci spolu? *124*

b) Koľko bodov pripadá priemerne na jedného žiaka? *31*

c) Koľkokrát trafili do bodového kruhu 10? Vyjadri v %. *3-krát; 15 %*

d) Ktorý bodový kruh zasiahli najčastejšie? Vyjadri v %. *8; 5-krát; 25 %*

3 ***Vypočítaj pomocou hodnôt v diagrame, koľko žiakov IX. B triedy písalo kontrolnú prácu z matematiky a aká bola priemerná známka z tejto kontrolnej práce.***



Priemerná známka:

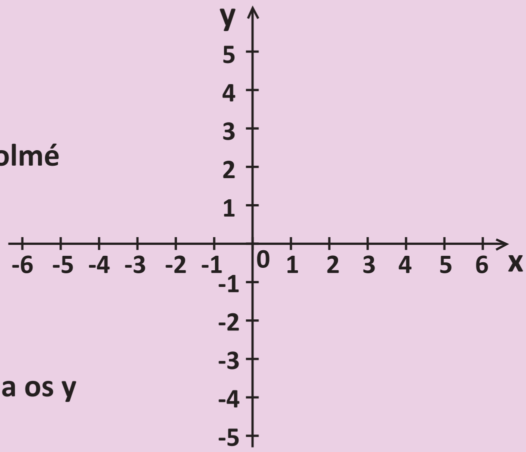
$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{22} = 2{,}409 \doteq 2{,}4$$

Kontrolnú prácu písalo 22 žiakov. Priemerná známka je 2,4.

VIII. GRAFICKÉ ZNÁZORŇOVANIE ZÁVISLOSTÍ

Pravouhlá (karteziánska) sústava súradníc

- pravouhlý súradnicový systém v rovine
- dvojrozmerná súradnicová sústava
- skladá sa z dvoch číselných osí, ktoré sú na seba kolmé
- jednotky dĺžky na osiach môžu byť rôzne
- slúži na zobrazenie bodov v rovine
- vodorovnú os označíme písmenom x
- zvislú os označíme písmenom y
- začiatok sústavy súradníc je priesečník súradnicových osí bod [0; 0], kde sa pretínajú os x a os y
- na osi x je kladná časť vpravo a záporná vľavo
- na osi y je kladná časť hore a záporná dole



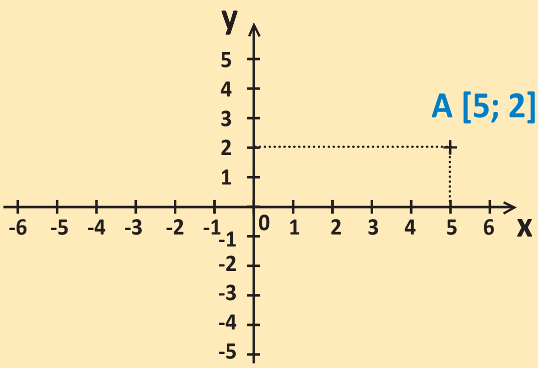
Súradnice bodu

- každý bod, ktorý chceme zobraziť v rovine, je daný dvoma súradnicami x, y

Všeobecný zápis: A [x; y]

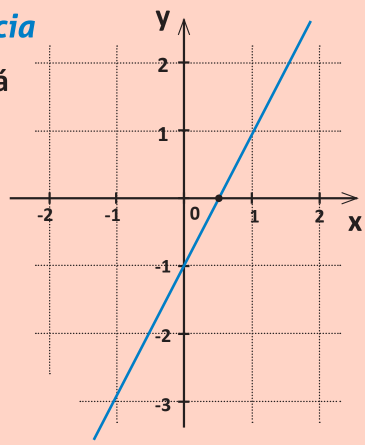
- súradnice tvoria usporiadanú dvojicu
  [x; y] ≠ [y; x] pre x ≠ y
- ak sa zmení poradie rôznych súradníc x, y v usporiadanej dvojici, usporiadaná dvojica bude určovať polohu iného bodu

Zobrazenie bodu A [5; 2] v pravouhlej sústave súradníc



Lineárna funkcia

- je funkcia daná predpisom
  $y = kx + q$,
  kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla,
  $k \neq 0$.
- grafom lineárnej funkcie je priamka rôznobežná s osou y



Lineárnu funkciu môžeme určiť:

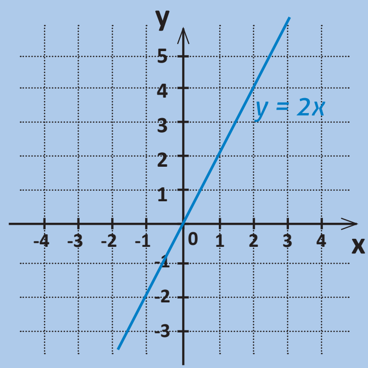
a) slovne: **y je 2-krát väčšie ako x**

b) tabuľkou:

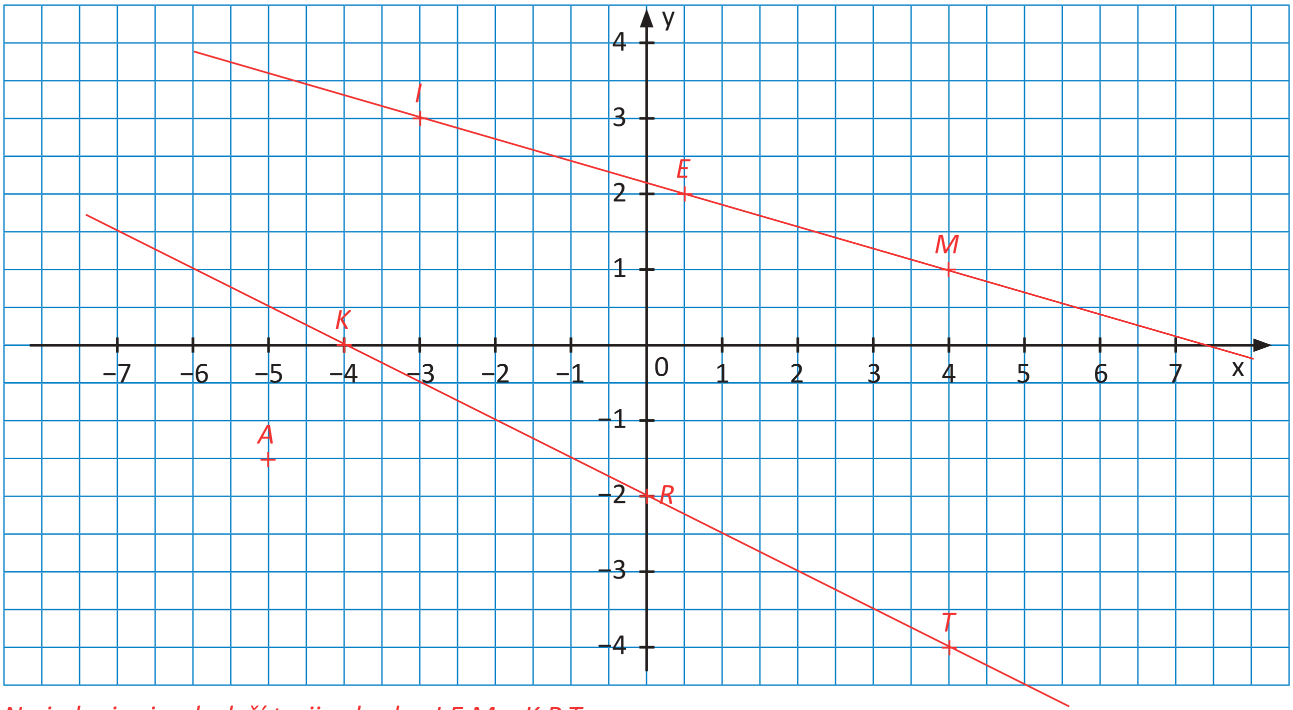
x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

c) predpisom: $y = 2x$

d) grafom

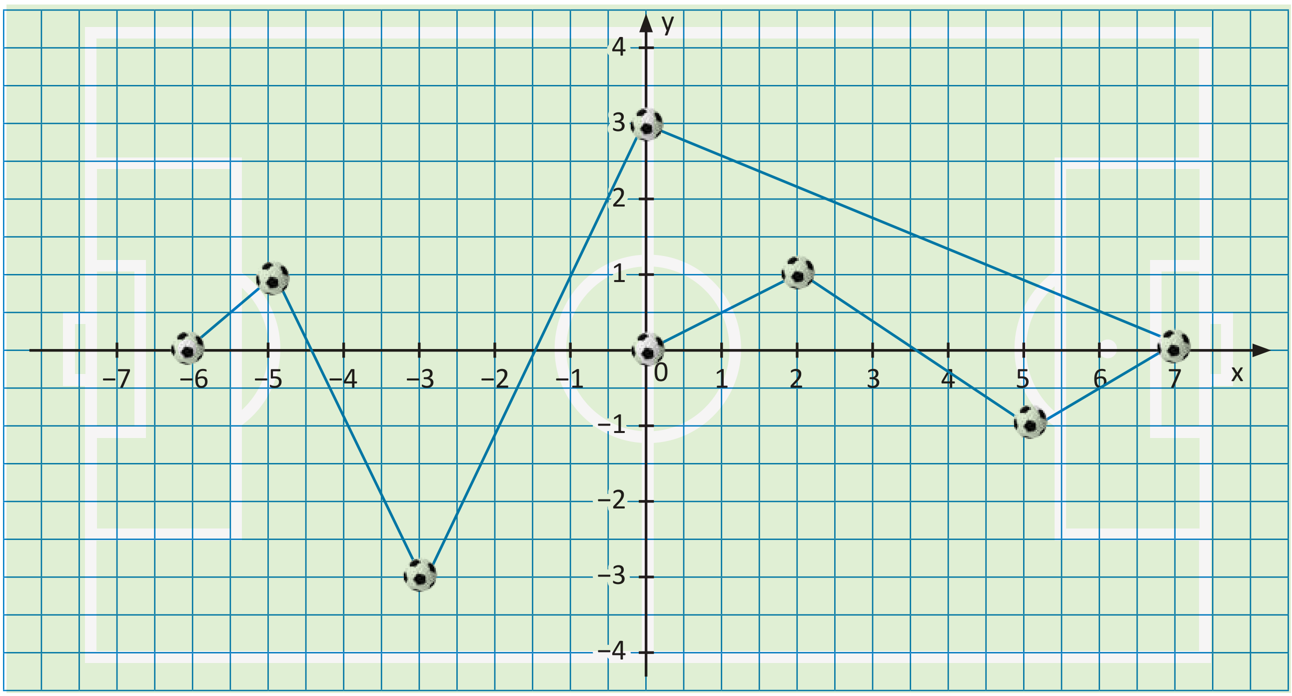


1 ***Vyznač v pravouhlom súradnicovom systéme na obrázku body M, E, T, R, I, K, A, ktoré majú nasledovné súradnice: M [4; 1], E [0,5; 2], T [4; −4], R [0; −2], I [−3; 3], K [−4; 0], A [−5; −1,5]. Ktorá trojica bodov leží na jednej priamke?***



Na jednej priamke leží trojica bodov I,E,M a K,R,T.

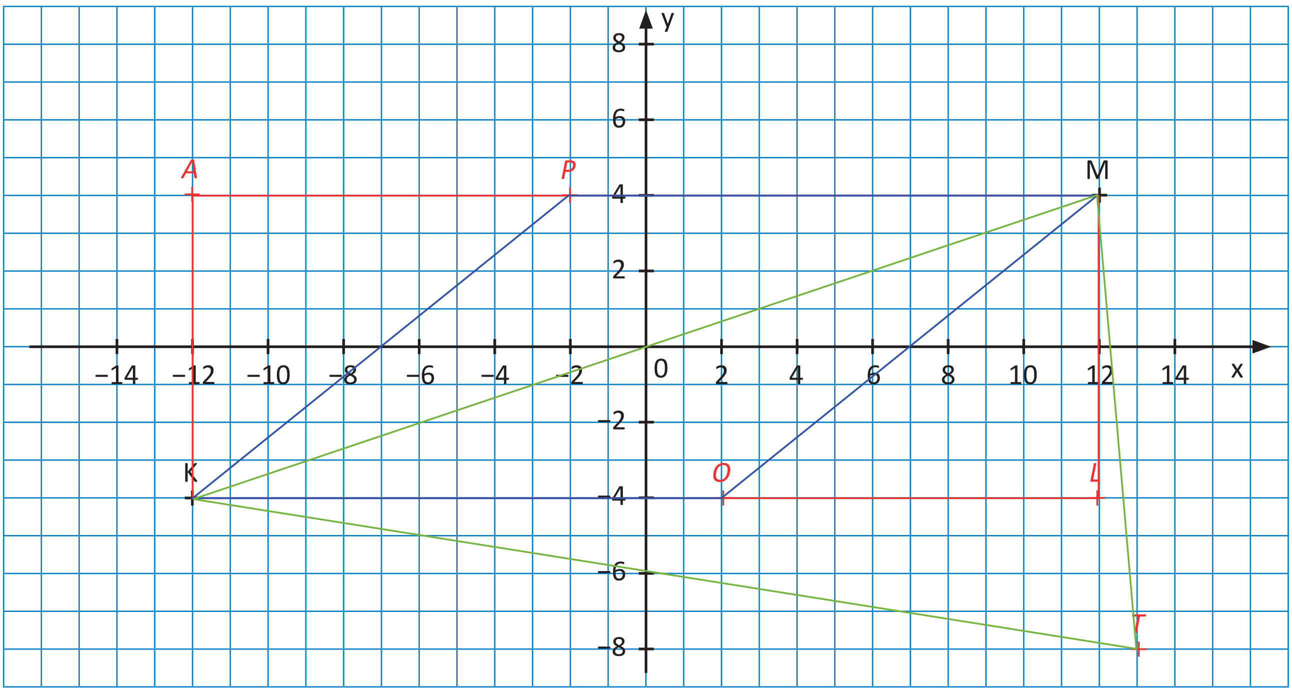
2 ***Zapíš súradnice jednotlivých polôh lopty postupne od rozohrávky [0; 0] až po strelu do rúk brankára [-6; 0].***



[0; 0], [2; 1], [5; −1], [7; 0], [0; 3], [−3; −3], [−5; 1], [−6; 0]

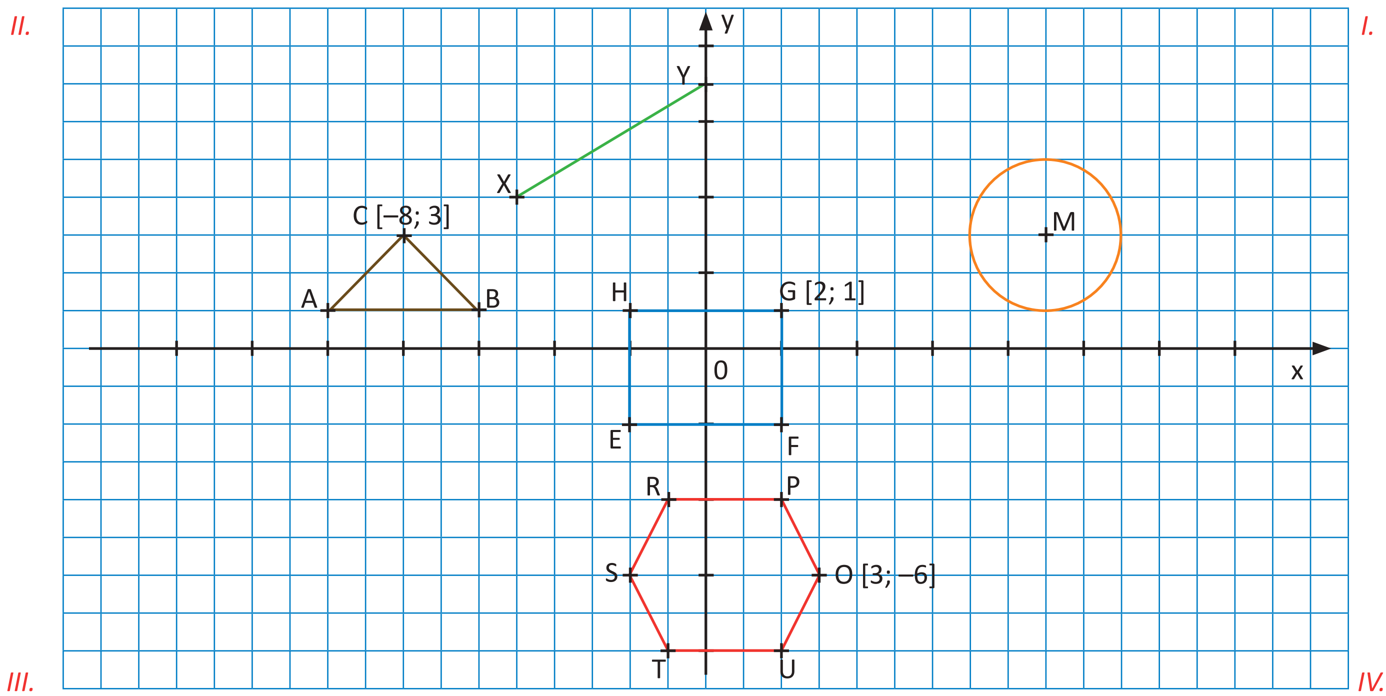
3 ***V súradnicovom systéme sú dané body K, M. Pomocou štvorcovej siete vyznač body:***

a) L, A tak, aby tvorili vrcholy obdĺžnika KLMA
b) O, P tak, aby vznikol kosodĺžnik KOMP *má viacero riešení*
c) bod T tak, aby vznikol ostrouhlý trojuholník KTM *má viacero riešení*
Každý útvar narysuj inou farbou. Zapíš súradnice bodov L, O, P, T, A.
L [12; −4]; O [2; −4]; P [−2; 4]; T [13; −8]; A [−12; 4]



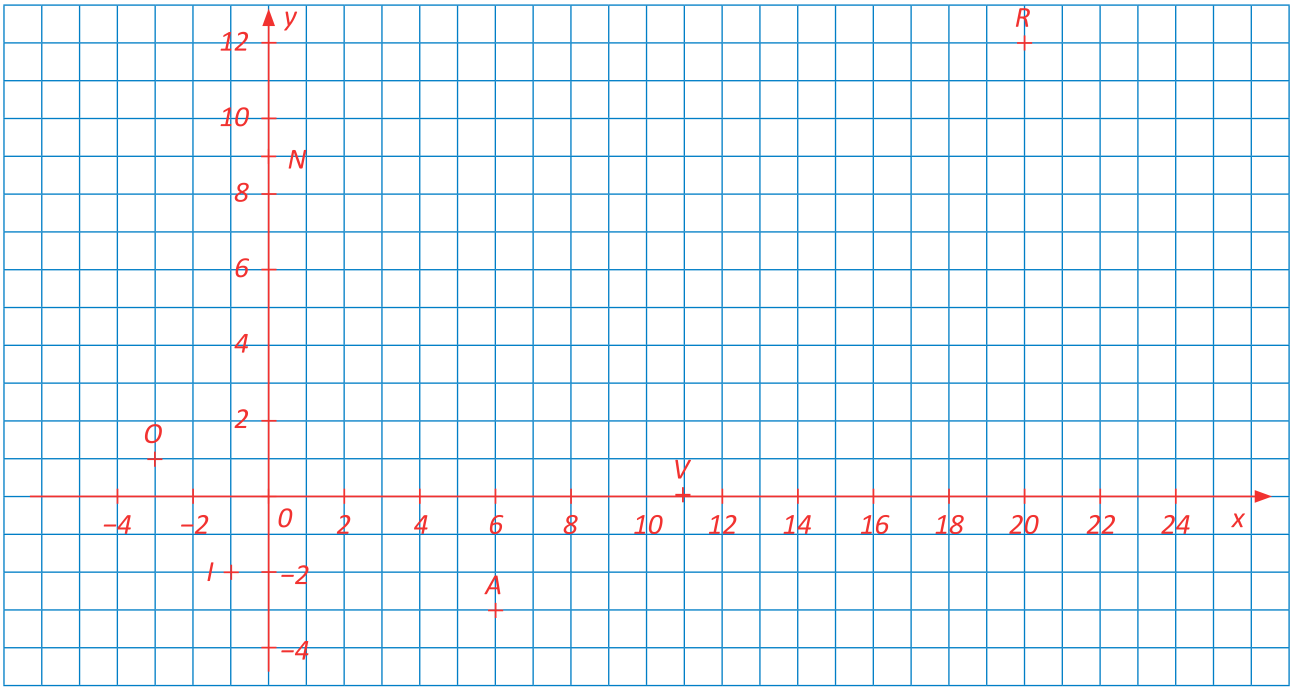
4 ***Urči súradnice zobrazených bodov v súradnicovom systéme.***

a) Koľko útvarov leží v 3. a v 4. kvadrante, ale neležia v 1. kvadrante? *jeden (šesťuholník)*
b) Koľko útvarov leží v 1. a v 2. kvadrante, ale neležia v 3. kvadrante? *tri (kruh, trojuholník, úsečka)*

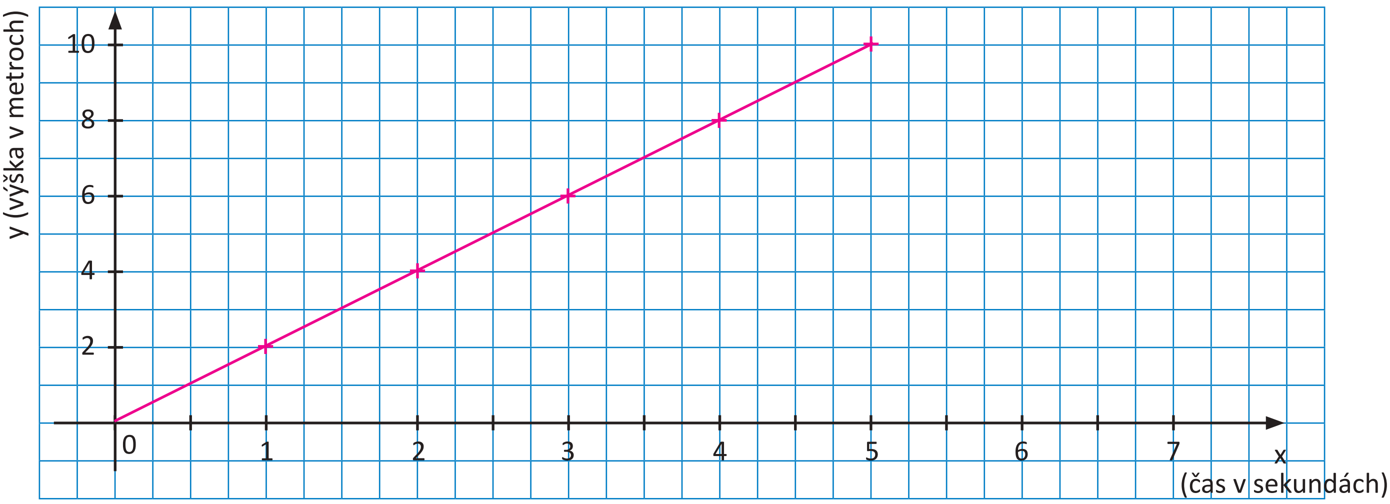


A [−10; 1]; B [−6; 1]; C [−8; 3]; E [−2; −2]; F [2; −2]; G [2; 1]; H [−2; 1]; M [9; 3]
O [3; −6]; P [2; −4]; R [−1; −4]; S [−2; −6]; T [−1; −8]; U [2; −8]; X [−5; 4]; Y [0; 7]

5 *Do pripravenej štvorcovej siete narysuj pravouhlú súradnicovú sústavu. Vhodne zvoľ umiestnenie osí x a y a počiatku sústavy a tiež dĺžku jednotkovej úsečky tak, aby si v nej mohol/-a vyznačiť body R [20; 12], O [−3; 1], V [11; 0], I [−1; −2], N [0; 9], A [6; −3].*



6 *Graf na obrázku popisuje stúpanie lanovky v priebehu času pri jej pohybe po opustení štartovacej stanice. (Predpokladáme, že pohyb lanovky je rovnomerný.)*



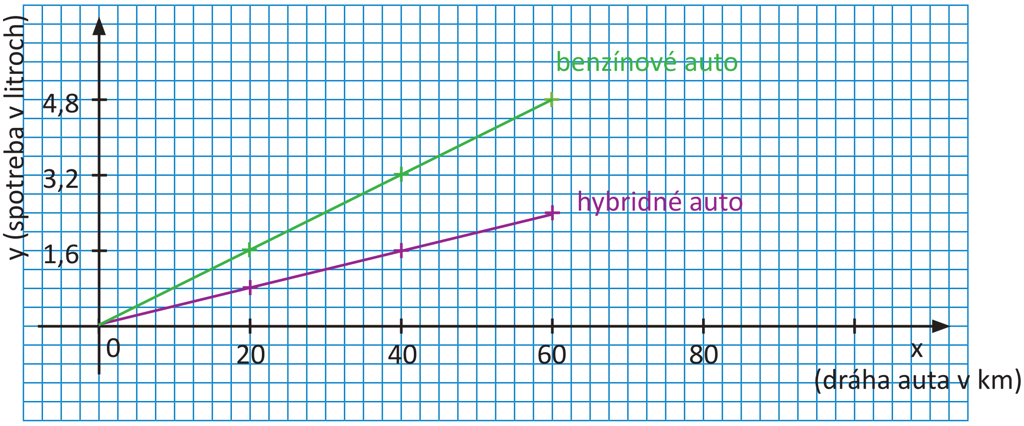
a) Podľa údajov z grafu doplň nasledujúcu tabuľku.

x	0	1	2	2,5	3	*4*	*4,5*	5
y	0	2	4	*5*	*6*	8	9	*10*

b) Akú výšku by dosiahla lanovka po 6 sekundách, ak by pokračoval daný priebeh zmeny?

Lanovka by po 6 sekundách dosiahla výšku 12 m.

7 ***Auto s benzínovým motorom a auto s hybridným pohonom prešli na ceste z Bratislavy do Leopoldova diaľničným úsekom vzdialenosť 60 km. Grafy na obrázku znázorňujú údaje o priemernej spotrebe paliva oboch áut. (Predpokladáme, že pohyb áut je rovnomerný.)***



a) Doplň podľa údajov z grafu nasledujúce tabuľky.
Benzínové auto

x	0	10	20	25	30	*40*	*50*	*55*	*60*
y	*0*	*0,8*	*1,6*	*2,0*	*2,4*	3,2	4	4,4	4,8

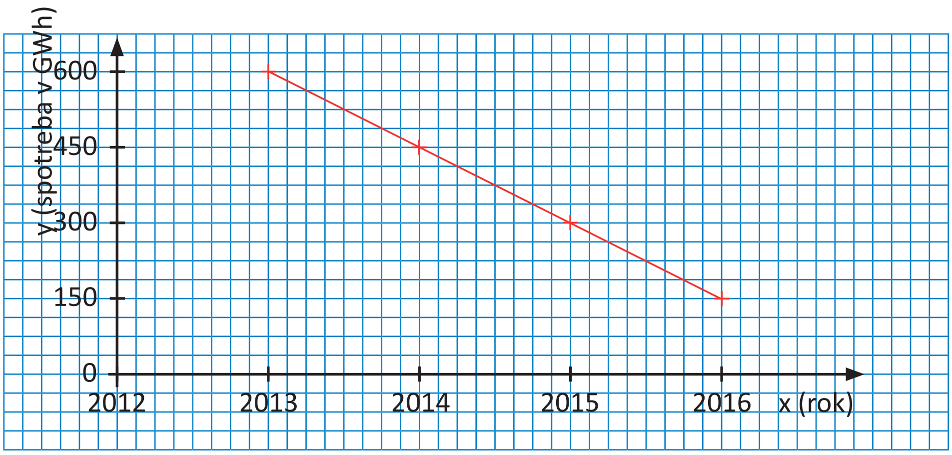
Hybridné auto

x	0	10	20	*30*	*40*	*50*	*60*
y	*0*	*0,4*	*0,8*	1,2	1,6	2	2,4

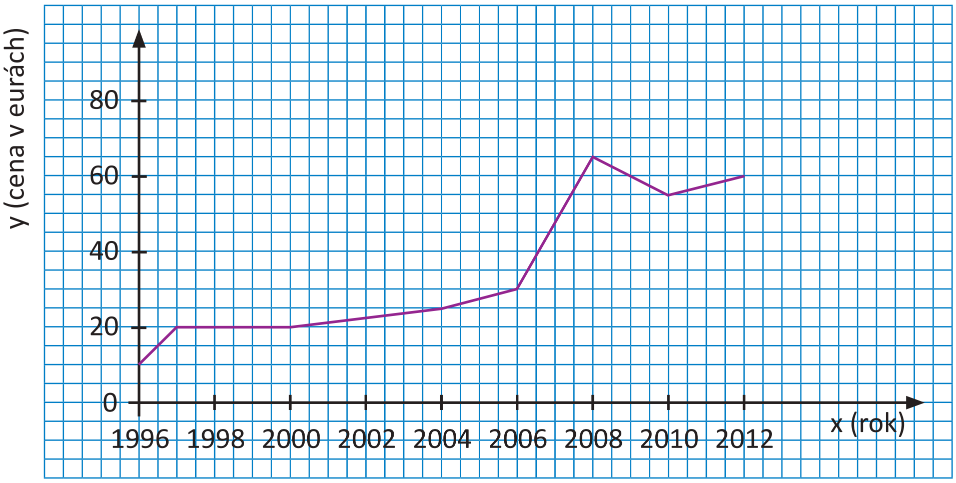
b) Akú priemernú spotrebu benzínu v litroch na 100 km vykazoval benzínový automobil?
Benzínový automobil vykazoval priemernú spotrebu 8 litrov benzínu na 100 km.
c) Akú priemernú spotrebu benzínu v litroch na 100 km vykazoval hybridný automobil?
Hybridný automobil vykazoval priemernú spotrebu 4 litre benzínu na 100 km.

8 ***Z tabuľky, ktorá popisuje predpokladaný pokles spotreby elektrickej energie verejného osvetlenia pri postupnom zavádzaní úsporných svietidiel, zostroj graf tejto zmeny spotreby v priebehu rokov. Zelenou farbou vyznač v tabuľke najväčšiu hodnotu a červenou najmenšiu hodnotu spotreby elektrickej energie.***

x (rok)	2013	2014	2015	2016
y (spotreba v GWh)	600	450	300	150



9 ***Graf na obrázku vyjadruje zmenu priemernej ceny pozemkov, ktorá bola zaznamenaná na území obce v priebehu rokov 1996 až 2012. Údaj vyjadruje cenu za výmeru 1 m².***



Vyčítaj z grafu nasledovné informácie:

a) V období ktorých rokov cena pozemkov rástla? *1996 – 1997, 2000 – 2008, 2010 – 2012*

b) V období ktorých rokov cena pozemkov klesala? *2008 – 2010*

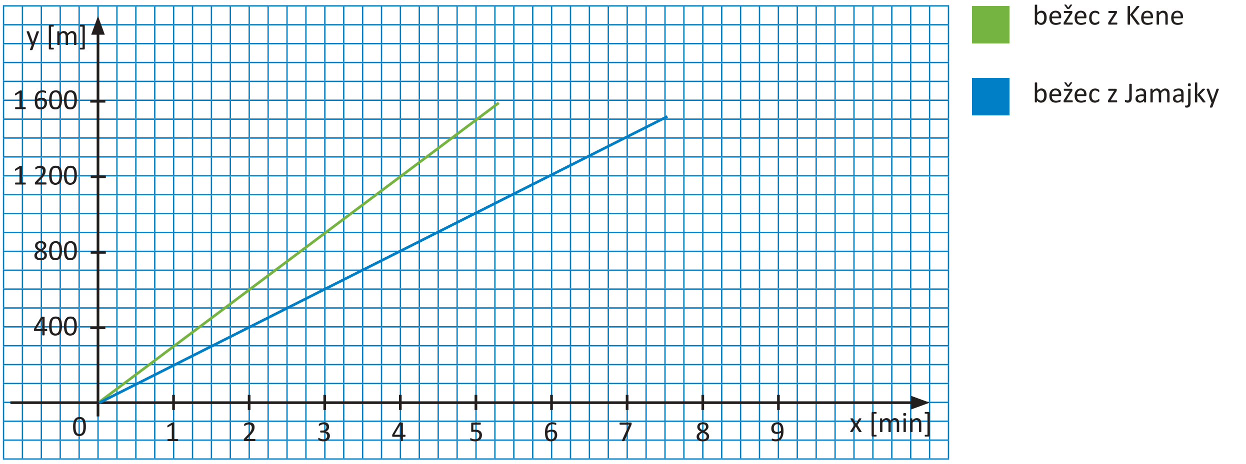
c) V období ktorých rokov sa cena pozemkov nemenila? *1997 – 2000*

d) V ktorom roku dosiahla cena pozemkov maximum? *2008*

e) V ktorom roku dosiahla cena pozemkov minimum? *1996*

f) V ktorých rokoch bol zaznamenaný najrýchlejší rast cien? *2006 – 2008*

10 ***Nasledujúci graf popisuje, akú dráhu prebehli dvaja maratónci v priebehu niekoľkých minút po štarte, kedy sa pohybovali stálou rýchlosťou.***



a) Podľa údajov z grafu doplň nasledujúce tabuľky.

Bežec z Kene

x	1	2	3	4
y	*300*	*600*	*900*	*1 200*

Bežec z Jamajky

x	1	2	3	3,5
y	*200*	*400*	*600*	*700*

b) Pre oboch bežcov vyjadri vzťah medzi veličinami x a y (pomocou predpisu $y = k \cdot x$, k je reálne číslo).

Bežec z Kene: $y = 300 \cdot x$
Bežec z Jamajky: $y = 200 \cdot x$

11 ***Ubytovaný hosť v turistickej ubytovni zaplatí 5 € za každú noc a jednorazovo 2 € za parkovanie auta, bez ohľadu na dĺžku pobytu.***

a) Zostav tabuľku, ktorá uvedie prehľad cien za ubytovanie počas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dní.

Počet dní (x)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Cena (y)	*7*	*12*	*17*	*22*	*27*	*32*	*37*

b) Zapíš predpis lineárnej funkcie ($y = k \cdot x + q$), ktorá popisuje závislosť ceny ubytovania na dĺžke pobytu.

$y = 5 \cdot x + 2$

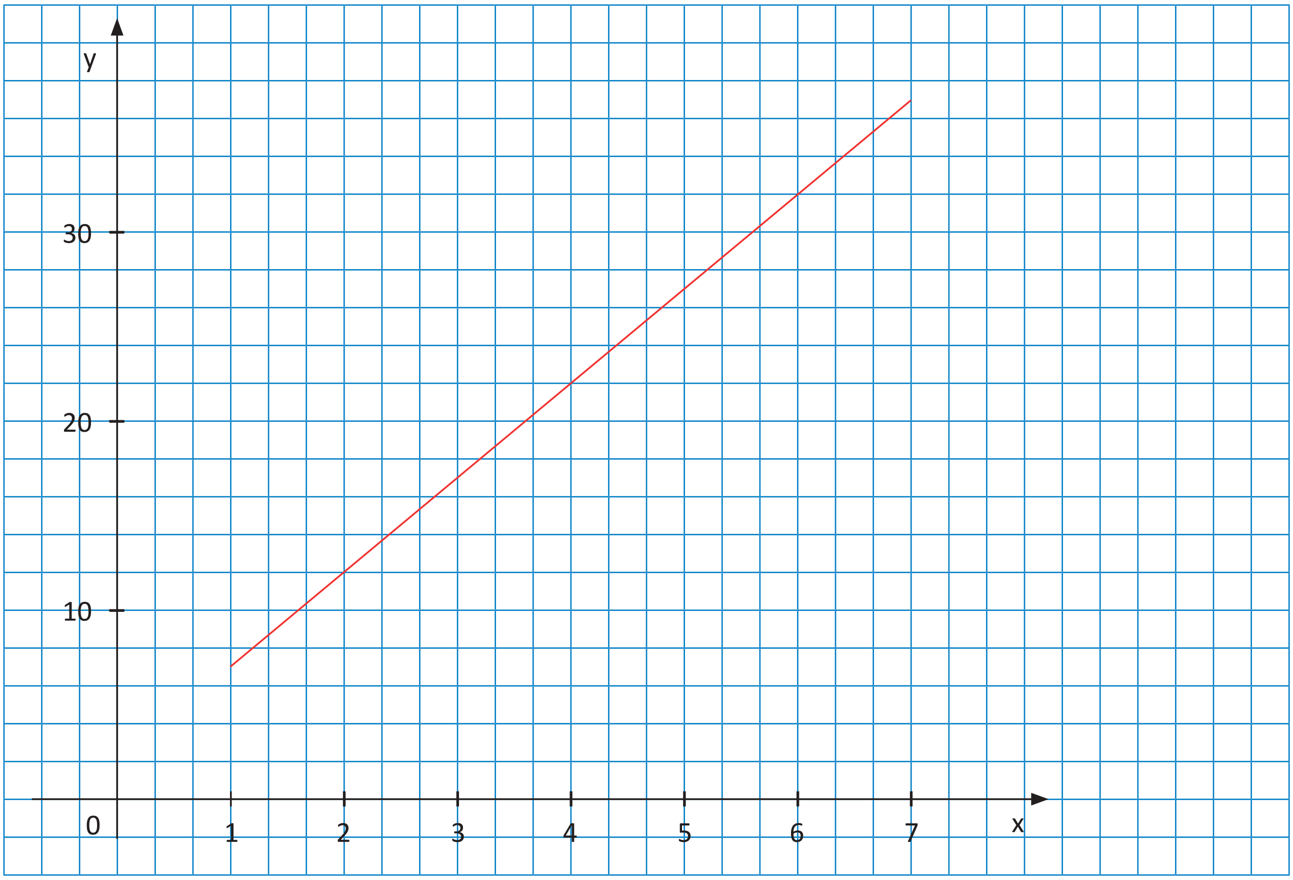
c) Vypočítaj pomocou tohto vzťahu cenu za ubytovanie počas 9 dní a počas dvoch týždňov.

9 dní: $y = 5 \cdot x + 2 = 5 \cdot 9 + 2 = 47$ €

2 týždne: $y = 5 \cdot x + 2 = 5 \cdot 14 + 2 = 72$ €

Cenu za ubytovanie počas 9 dní je 47 € a počas dvoch týždňov je 72 €.

d) Zostroj graf tejto funkcie, ak hodnoty veličiny x sú reálne čísla, pre ktoré platí $1 \leq x \leq 7$.



12 ***Doplň podľa vzoru do tabuľky hodnoty koeficientov k a q lineárnych funkcií $y = k \cdot x + q$.***

$y = k \cdot x + q$	hodnota k	hodnota q
$y = x$	1	0
$y = -2x$	*−2*	*0*
$y = 1{,}5\,x - 8$	*1,5*	*−8*
$y = -\frac{5}{6}\,x + 1$	*$-\frac{5}{6}$*	*1*

13 ***Doplň do tabuliek hodnoty lineárnych funkcií y = k · x + q. Množinu hodnôt x aj množinu hodnôt y tvoria všetky reálne čísla.***

a) y = 2x + 1

x	−2	0	1	2
y	*−3*	*1*	*3*	*5*

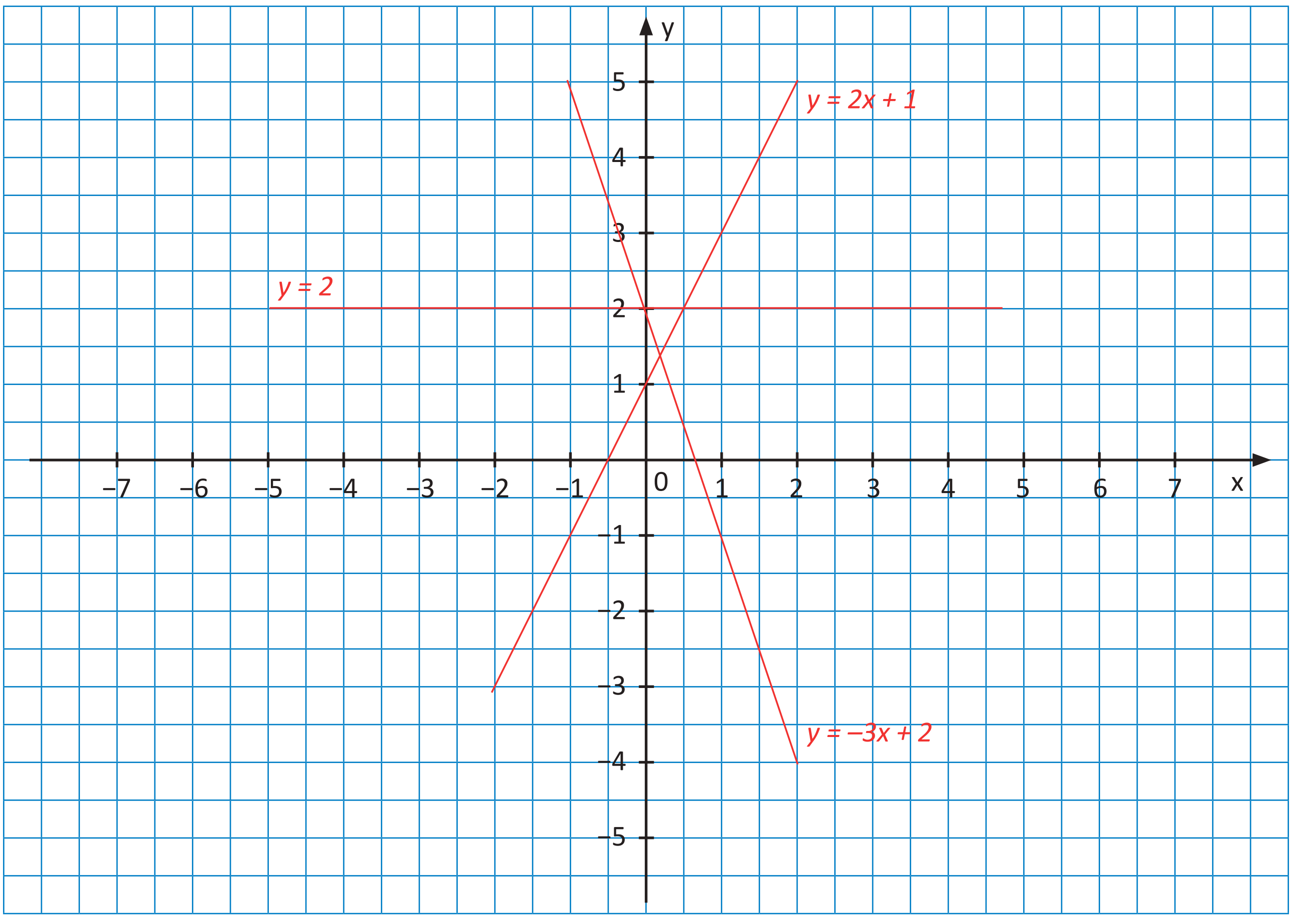
b) y = −3x + 2

x	−1	0	1	2
y	*5*	*2*	*−1*	*−4*

c) y = 2   (y = 0 · x + 2)

x	−2	−1	0	1
y	*2*	*2*	*2*	*2*

Do pripravenej súradnicovej sústavy zostroj grafy všetkých troch funkcií.



Doplň do nasledujúcich tvrdení znaky <, =, >:

a) S narastaním hodnôt nezávislej veličiny x hodnoty závislej veličiny y rastú, ak k $\boxed{>}$ 0.

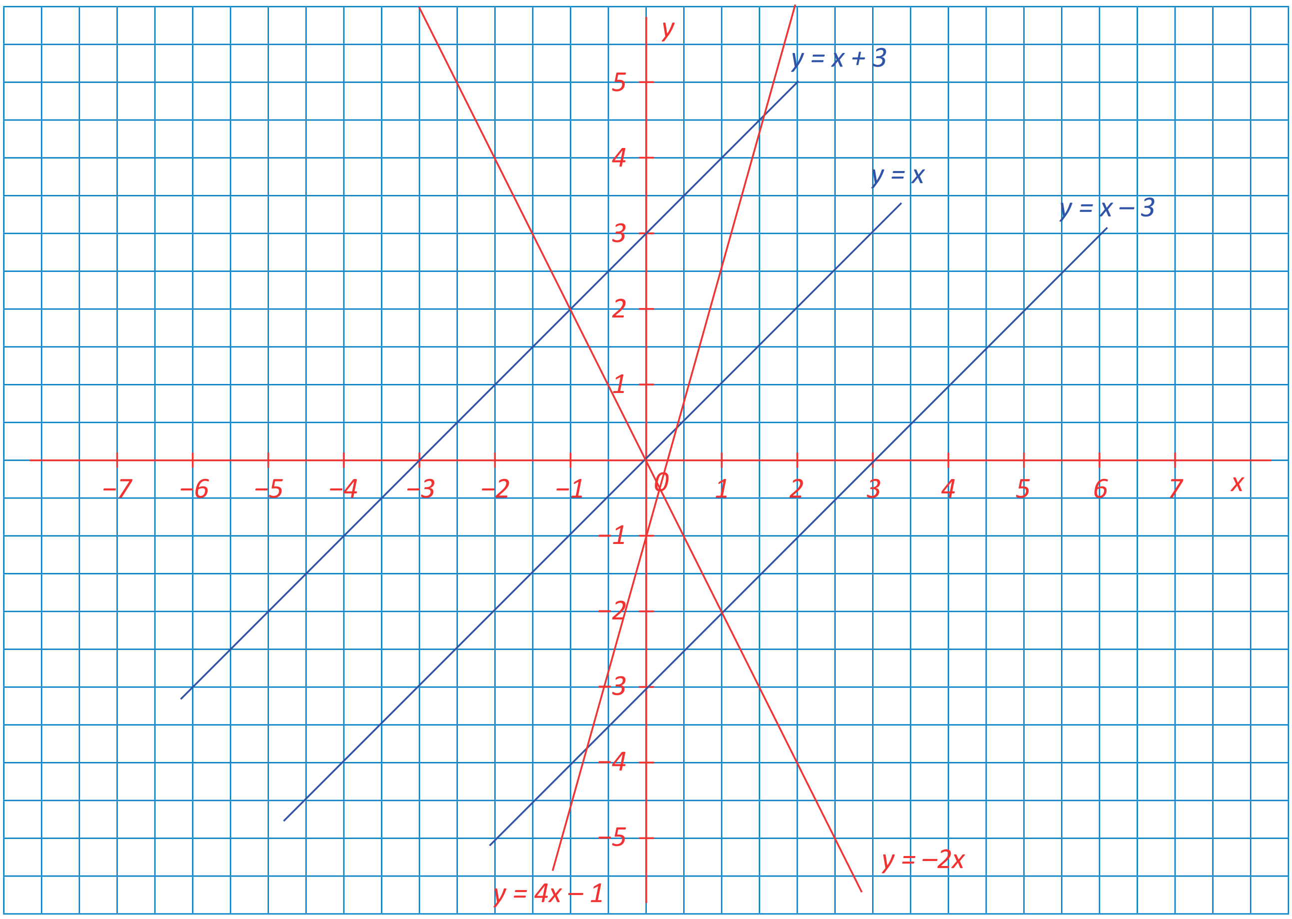
b) S narastaním hodnôt nezávislej veličiny x hodnoty závislej veličiny y klesajú, ak k $\boxed{<}$ 0.

c) S narastaním hodnôt nezávislej veličiny x sa hodnoty závislej veličiny y nemenia (sú konštantné), ak k $\boxed{=}$ 0.

14 ***Doplň do tabuľky hodnoty lineárnych funkcií y = k · x + q. Urči hodnotu koeficientu q. Množinu hodnôt x aj množinu hodnôt y tvoria všetky reálne čísla.***

x	−1	0	1	hodnota q
y = x (y = x + 0)	*−1*	*0*	*1*	*0*
y = x + 3	*2*	*3*	*4*	*3*
y = x − 3	*−4*	*−3*	*−2*	*−3*

Do štvorcovej siete narysuj vhodný pravouhlý súradnicový systém a zostroj grafy všetkých troch funkcií z tabuľky.



15 ***Zostroj grafy a urči priesečníky grafov týchto lineárnych funkcií s osou x a s osou y.***

sú uvedené v obrázku vyššie (v štvorcovej sieti v úlohe 14)

a) y = x + 3

určíme priesečník s osou x: y = 0, potom x = y − 3 = −3 — *Priesečník s osou x: [−3; 0]*

určíme priesečník s osou y: x = 0, potom y = x + 3 = 3 — *Priesečník s osou y: [0; 3]*

b) y = −2x

určíme priesečník s osou x: y = 0, potom x = y : (−2) = 0 — *Priesečník s osou x: [0; 0]*

určíme priesečník s osou y: x = 0, potom y = −2x = 0 — *Priesečník s osou y: [0; 0]*

c) y = 4x – 1

určíme priesečník s osou x: y = 0, potom x = (y + 1) : 4 = 0,25 — *Priesečník s osou x: [0,25; 0]*

určíme priesečník s osou y: x = 0, potom y = 4x – 1 = −1) — *Priesečník s osou y: [0; −1]*

16 ***Urči, či bod A so súradnicami [1; 3] patrí grafu lineárnej funkcie:***

a) $y = 3x$

ak $x = 1$, potom $y = 3x = 3$ *bod A patrí grafu lineárnej funkcie*

b) $y = 2x + 1$

ak $x = 1$, potom $y = 2x + 1 = 3$ *bod A patrí grafu lineárnej funkcie*

c) $y = 5x - 2$

ak $x = 1$, potom $y = 5x - 2 = 3$ *bod A patrí grafu lineárnej funkcie*

d) $y = -x + 5$

ak $x = 1$, potom $y = -x + 5 = 4 \neq 3$ *bod A nepatrí grafu lineárnej funkcie*

17 ***Urči správne druhú súradnicu bodu, ktorý patrí grafu.***

a) $y = 2x - 3$ A $[-5; -13]$ *$x = -5$; $y = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$*

b) $y = -x - 3$ B $[1{,}5; -4{,}5]$ *$y = -4{,}5$; $x = -y - 3 = -(-4{,}5) - 3 = 1{,}5$*

c) $y = -3x + 2$ C $[5; -13]$ *$x = 5$; $y = -3 \cdot 5 + 2 = -13$*

d) $y = \frac{3}{2}x + 3$ D $[-1; \frac{3}{2}]$ *$y = \frac{3}{2}$; $x = 2 \cdot (y - 3) : 3 = -1$*

18 ***Rozhodni, či daná lineárna funkcia je rastúca alebo klesajúca.***

a) $y = 4x$

$y = 4x$; $k = 4 > 0$, preto lineárna funkcia je rastúca

b) $y = x - 7$

$y = x - 7$; $k = 1 > 0$, preto lineárna funkcia je rastúca

c) $y = -x$

$y = -x$; $k = -1 < 0$, preto lineárna funkcia je klesajúca

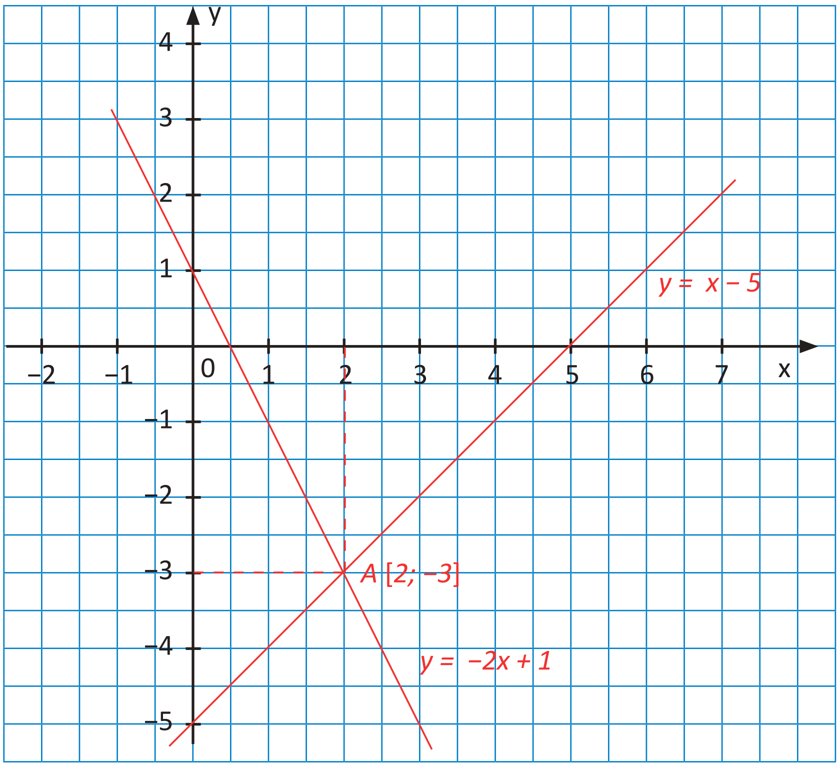
d) $y = 4$

$y = 4$; $k = 0$, preto lineárna funkcia je konštantná

e) $y = -2x + 3$

$y = -2x + 3$; $k = -2 < 0$, preto lineárna funkcia je klesajúca

19 ***Na dispečingu vidieť na monitore dve dráhy letu lietadiel letiacich v rôznych výškach. Jedno lietadlo sa pohybuje po dráhe $y = x - 5$ a druhé po dráhe $y = -2x + 1$. Prechádzajú dráhy obidvoch lietadiel tým istým súradnicovým bodom? Rieš graficky.***

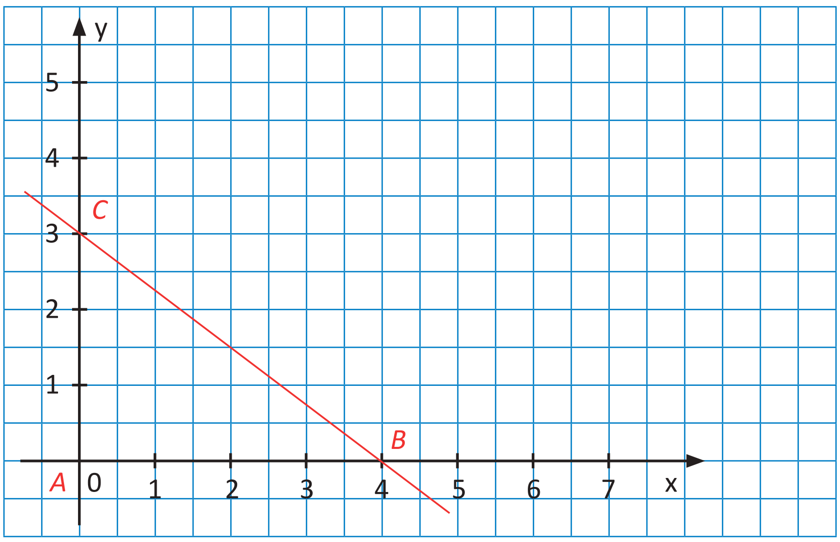


napr.	x	0	1
y =	x − 5	−5	−4
y =	−2x + 1	1	−1

Áno, tieto dráhy prechádzajú tým istým súradnicovým bodom A [2; −3].

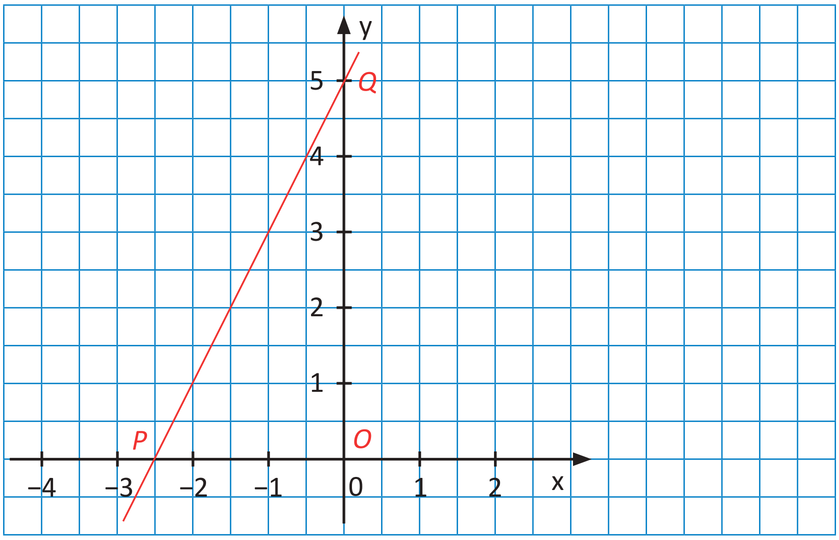
20 ***Urči obvod trojuholníka ABC, kde bod A je začiatok súradnicovej sústavy, bod B je priesečník grafu lineárnej funkcie $y = -\frac{3}{4} \cdot x + 3$ s osou x a C je priesečník grafu tejto funkcie s osou y.***

|AB| = 4 cm; |AC| = 3 cm; |BC| = 5 cm; o = 4 cm + 3 cm + 5 cm = 12 cm



Obvod trojuholníka ABC je 12 cm.

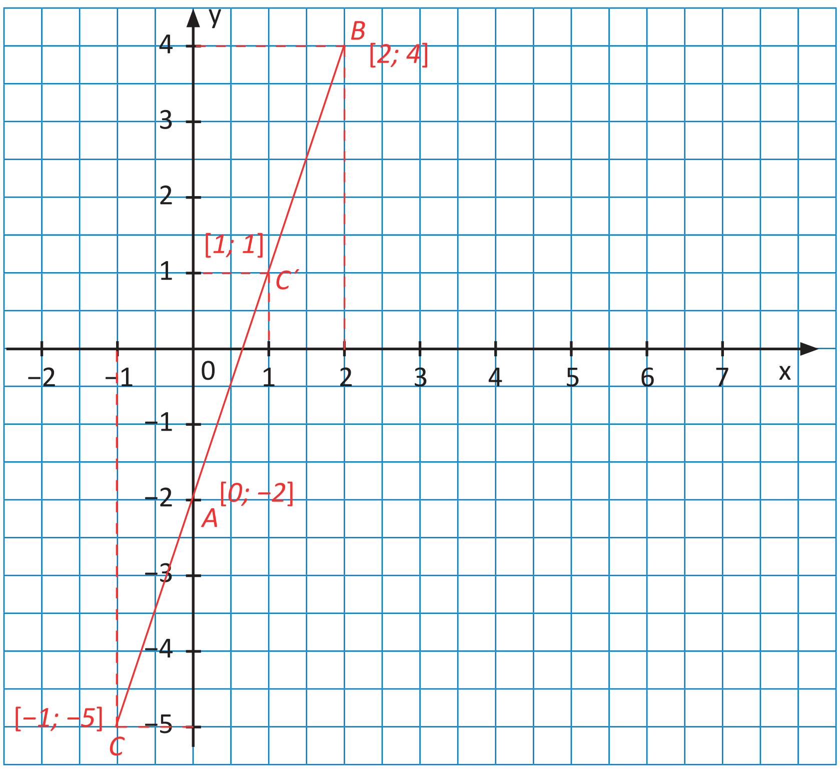
21 ***Urči obsah trojuholníka POQ, kde P je priesečník grafu lineárnej funkcie y = 2 · x + 5 s osou x, Q je priesečník grafu tejto funkcie s osou y a O je začiatok súradnicovej sústavy.***



$|OP| = 2{,}5$ cm; $|OQ| = 5$ cm; $S = \dfrac{|OP| \cdot |OQ|}{2} = 6{,}25$ cm²

Obsah trojuholníka POQ je *6,25* cm².

22 ***Dané sú tri body A, B, C. Bod A má súradnice [0; –2] a bod B [2; 4]. Zisti, aké súradnice môže mať bod C, ak platí, že body ležia na jednej priamke.***



Bod C môže mať súradnice [–1; –5] alebo [1; 1].

23 ***Cisterna sa napĺňa naftou. Za 5 minút pritečie 20 hl nafty.***

a) Napíš rovnicu závislosti množstva V načerpanej nafty (v hl) od času t (v minútach) čerpania.

V = 20 hl; k = 5 min

$V = k \cdot t;\ k = V : t = 20\ hl : 5\ min = 4\ \frac{hl}{min};\quad V = 4 \cdot t$

Rovnica závislosti množstva načerpanej nafty od času čerpania: V = 4 · t

b) Urči, za aký čas sa naplní 180 hl nádrž (cisterna).

V = 180 hl; t = ?

$V = 4 \cdot t;\ t = V : 4 = 180\ hl : 4\ \frac{hl}{min} = 45\ min$

Nádrž s objemom 180 hl sa naplní za *45* minút.

24 ***Pán Michal počítal predpokladané ročné náklady na prevádzku svojho auta. Určil nasledovné náklady: zákonné poistenie 60 €, diaľničná známka 50 €, výmena oleja 50 €, zmes do ostrekovača 15 €, umývanie 25 €. K týmto položkám je ešte potrebné pripočítať cenu paliva 0,08 € za 1 km.***

a) Vyjadri závislosť ročných nákladov na počte najazdených kilometrov, zahŕňajúc všetky uvedené položky a ich cenu.

cena paliva za x km .... 0,08x €

cena všetkých uvedených položiek ....60 € + 50 € + 50 € + 15 € + 25 € = 200 €

Závislosť ročných nákladov na počte najazdených kilometrov je y = 0,08x + 200.

b) Aké boli náklady pána Michala, ak za rok najazdil 13 598 km?

x = 13 598 km

y = 0,08x + 200

y = 0,08 · 13 598 + 200

y = 1 287,84

Náklady pána Michala za rok boli *1 287,84* €.

25 ***Zákazník platí mobilnému operátorovi 13 centov za každú pretelefonovanú minútu do všetkých sietí na Slovensku a vo vybraných krajinách v zahraničí. Mobilný operátor na konci fakturačného obdobia odpočíta zákazníkovi bonus 5 €, ktorý získal za prestup od iného operátora.***

a) Vyjadri závislosť ceny, ktorú zaplatí zákazník od počtu minút, ktoré pretelefonoval.

cena za každú pretelefonovanú minútu ....0,13x €

bonus ....5 €

Závislosť ceny od počtu minút, ktorú zaplatí zákazník, je y = 0,13x – 5.

b) Akú sumu bude fakturovať mobilný operátor, ak zákazník pretelefonoval 70 minút?

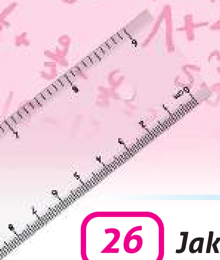
x = 70

y = 0,13x – 5

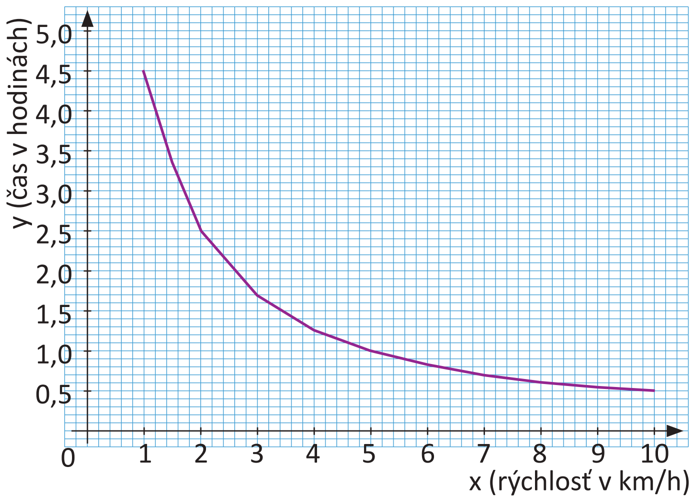
y = 0,13 · 70 – 5

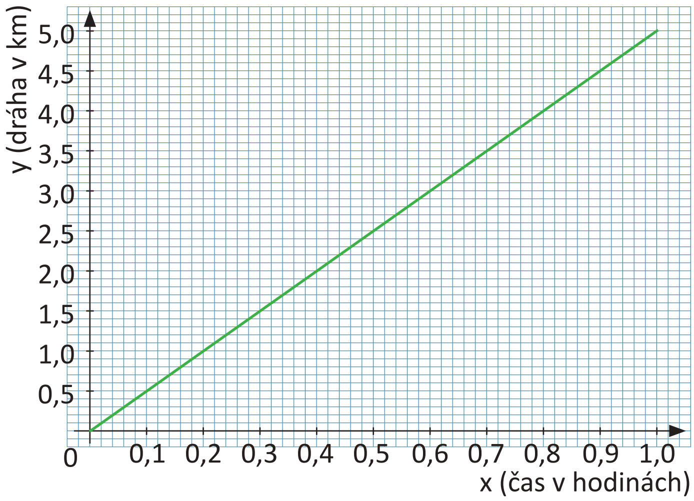
y = 4,10

Mobilný operátor bude fakturovať sumu *4,10* €.



26 ***Jakub navštevuje starých rodičov na bicykli. Dnes sa rozhodol, že pôjde peši. Z údajov z počítadla kilometrov na bicykli vie, že ho čaká trasa dlhá 5 kilometrov. Cestu si kráti výpočtami času, rýchlosti a dráhy svojej cesty. Výsledky niektorých jeho výpočtov vyjadrujú nasledujúce grafy.***





a) Vyjadri typ úmery medzi veličinami oboch grafov.
Čas je nepriamo úmerný rýchlosti pohybu. Dráha je priamo úmerná času pohybu.

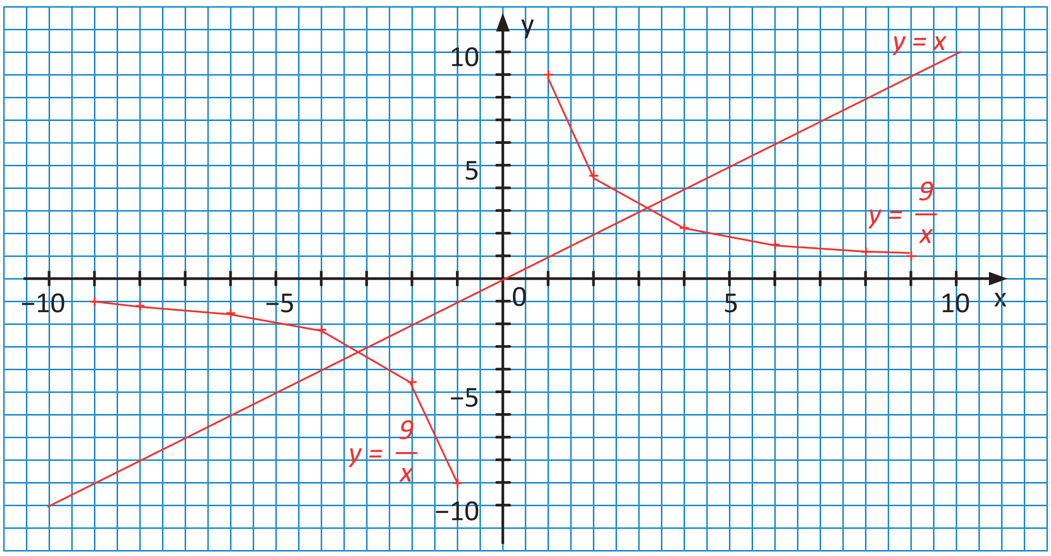
b) Z grafu závislosti času od rýchlosti pohybu urči:
Akou rýchlosťou by Jakub dorazil do cieľa za polhodinu? *10 km/h*
Ako dlho by trvala cesta, ak by sa pohyboval rýchlosťou 4 km/h? *1,25 hodiny*

c) Z grafu závislosti dráhy od času urči:
Akú dráhu by prešiel po 36 minútach pohybu? *3 km*
Za aký čas by prešiel dráhu 500 metrov? *0,1 h*

27 ***Doplň do tabuľky hodnoty funkcií $y = \frac{9}{x}$ a $y = x$. Urč nulové hodnoty daných funkcií.***

x	−9	−8	−6	−4	−2	−1	1	2	4	6	8	9
$y = \frac{9}{x}$	*−1*	*−1,125*	*−1,5*	*−2,25*	*−4,5*	*−9*	*9*	*4,5*	*2,25*	*1,5*	*1,125*	*1*
y = x	*−9*	*−8*	*−6*	*−4*	*−2*	*−1*	*1*	*2*	*4*	*6*	*8*	*9*

Pomocou tabuľky zostroj do štvorcovej siete a pripravenej súradnicovej sústavy grafy oboch funkcií.



OPAKOVANIE I.

1 ***Rozhodni, či daný bod K so súradnicami [−2; 3] patrí grafu lineárnej funkcie:***

a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ *$y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$, bod K patrí grafu lineárnej funkcie*

b) $y = -\frac{3}{2}x$ *$y = -\frac{3}{2} \cdot (-2) = 3$, bod K patrí grafu lineárnej funkcie*

c) $y = \frac{1}{2}x - 2$ *$y = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 2 = -3 \neq 3$, bod K nepatrí grafu lineárnej funkcie*

2 ***Výpočtom urči priesečník grafu lineárnej funkcie y = −2x + 3 s osami súradníc.***

a) priesečník grafu funkcie s osou x: *$y = 0$; $0 = -2x + 3$; $x = 1{,}5$* *[1,5; 0]*

b) priesečník grafu funkcie s osou y: *$x = 0$; $y = -2 \cdot 0 + 3$; $x = 3$* *[0; 3]*

3 ***Rozhodni, či daná lineárna funkcia je rastúca alebo klesajúca.***

a) $y = 1{,}5x$

$k = 1{,}5$; $1{,}5 > 0$; lineárna funkcia je rastúca

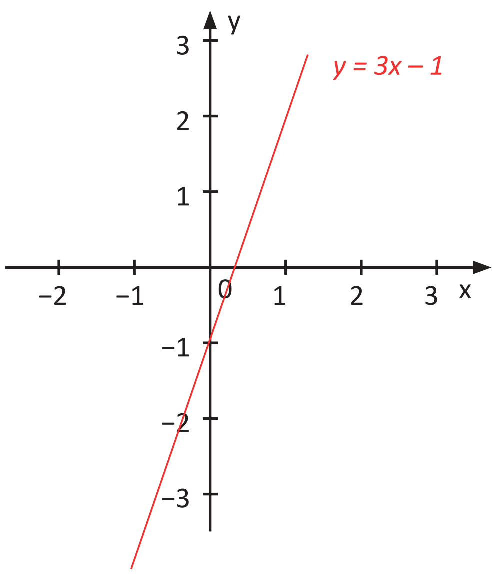
b) $y = -3$

$k = 0$; lineárna funkcia je konštantná

c) $y = -4x + 1$

$k = -4$; $-4 < 0$; lineárna funkcia je klesajúca

4 ***Zostroj graf lineárnej funkcie y = 3x − 1.***



[0; −1]

[1; 2]

OPAKOVANIE II.

1 ***Urči správne druhú súradnicu bodu, ktorý patrí grafu lineárnej funkcie.***

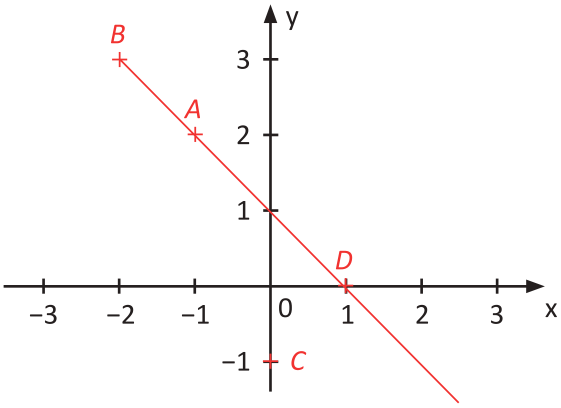
a) $y = 6x - 4$; $A\left[\frac{1}{3}; -2\right]$ — $x = \frac{1}{3}$; $y = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2$ — $A\left[\frac{1}{3}; -2\right]$

b) $y = -\frac{2}{5}x + 1$; $B[-10; 5]$ — $y = 5$; $x = \frac{-5}{2} \cdot (y-1) = \frac{-5}{2} \cdot (5-1) = -10$ — $B[-10; 5]$

c) $y = 2$; $C[-5; 2]$ — $x = -5$; $y = 2$ — $C[-5; 2]$

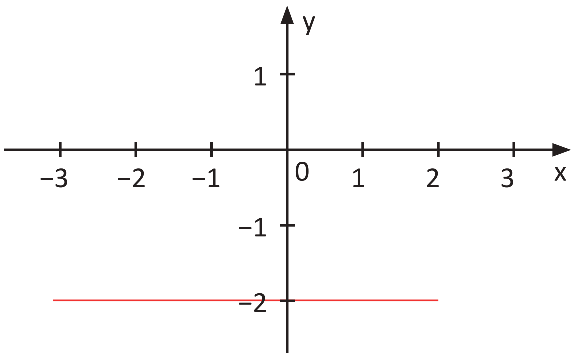
2 ***Zostroj a zisti, ktoré body ležia na jednej priamke.***

A [−1; 2]; B [−2; 3]; C [0; −1]; D [1; 0]



Na jednej priamke ležia body: A, B, D.

3 ***Zostroj graf lineárnej funkcie y = −2.***



Lineárna funkcia y = –2 je konštantná funkcia.

4 ***Rodičia šetria na dovolenku. Na začiatok si odložili 500 € a rozhodli sa, že každý mesiac k sume pridajú 150 €. Vyjadri závislosť medzi usporenou sumou a počtom mesiacov sporenia.***

u = úspory, m = počet mesiacov
$u = 500 + 150 \cdot m$

Závislosť medzi usporenou sumou a počtom mesiacov sporenia: $u = 500 + 150 \cdot m$