

Zuzana Berová Peter Bero

Pomocník z matematiky

pre 7. ročník ZŠ
a 2. ročník gymnázií
s osemročným štúdiom

Zošit pre učiteľa

OrbisPictusIstropolitana
Bratislava

Na zvládnutie problematiky zlomkov v celej šírke považujeme za podstatné zvládnuť úvodné časti – čo je zlomok, aká je jeho geometrická interpretácia, aký význam má menovateľ a čitateľ. Preto týmto základným veciam venujeme veľkú pozornosť.

Na tejto strane delíme –
spejeme k menovateľovi
(a ku krajším zajtrajškom)
– na rôzne veľké časti,
– diskkrétne veci,
– spojité útvary.

1 Zlomky

Zlomok

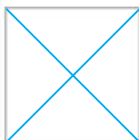


1 Rozdeľ na:

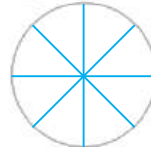
a polovice



b štvrtiny



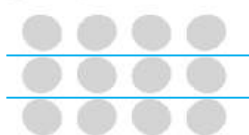
c osminy



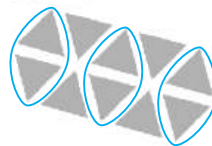
d šestiny



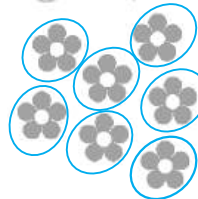
e tretiny



f pätiny



g sedminy



h devätiny



2 Označ náhrdelníky, ktoré sa nedajú rozstrihnúť na tretiny.

✓ áno ✗ nie



3 Narysuj úsečku vhodnej dĺžky a rozdeľ ju na:

a osminy,

b štvrtiny,

c tretiny,

d pätiny,

4 Doplň.

a Čokoládu rozdelím na 2 polovice. c Futbalový zápas trvá 2 polčasy.

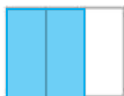
b Hokejový zápas má 3 tretiny. d Basketbal je rozdelený na 4 štvrtiny.

5 Vyfarbi:

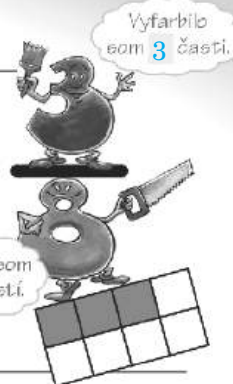
a $\frac{3}{4}$ útvaru.



b $\frac{2}{3}$ útvaru.



Rozdelilo som na 8 častí.



6 Rozdeľ útvar a vyfarbi danú časť.

a $\frac{1}{3}$



d $\frac{5}{2}$



b $\frac{3}{6}$



e $\frac{10}{8}$



c $\frac{7}{7}$

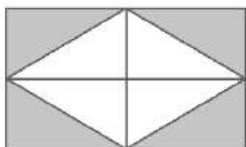


f $\frac{3}{2}$



7 Napiš zlomkom, aká časť útvaru je vyfarbená a aká časť je nevyfarbená.

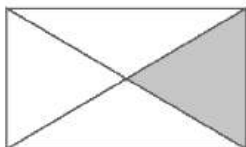
a



Vyfarbená: $\frac{1}{4}$

Nevyfarbená: $\frac{3}{4}$

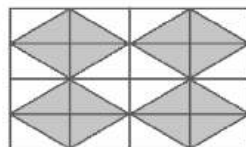
c



Vyfarbená: $\frac{1}{4}$

Nevyfarbená: $\frac{3}{4}$

e



Vyfarbená: $\frac{1}{2}$

Nevyfarbená: $\frac{1}{2}$

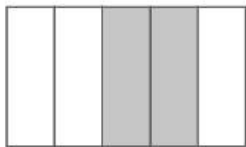
b



Vyfarbená: $\frac{1}{2}$

Nevyfarbená: $\frac{1}{2}$

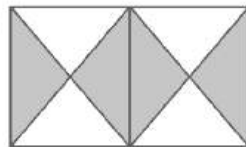
d



Vyfarbená: $\frac{2}{5}$

Nevyfarbená: $\frac{3}{5}$

f



Vyfarbená: $\frac{1}{2}$

Nevyfarbená: $\frac{1}{2}$

Na tejto strane časť z rozdeľných častí vyfarbujeme – spejeme k čitateľovi (a ešte k lepším pozajtrajškom).

Úloha 6d)

Úloha 6e)

Úloha 6f)

Prvýkrát ukazujeme, ako sa dá modelovať zlomok väčší ako 1!

Úloha 7

Na tomto príklade ukazujeme niekoľko vecí:

- propedeutika zjednodušovania zlomkov (napr. zadanie a): je vyfarbená jedna polovica alebo štyri osminy?);
- sčítanie zlomkov (čo dostaneme, keď sčítame vyfarbené a nevyfarbené časti?);
- „pomocné“ delenie celku na rovnaké diely – zadanie f).



Úloha 8

Pozor na vzájomnú polohu bodov B a C !

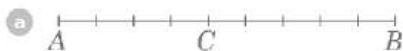
Úloha 10

Nakreslený obrázok môže pomôcť žiakom pri určení správnej odpovede. Pokiaľ žiaci napíšu odpovede (tak ako my), je to správne, ale vyzvite ich, aby sa ich pokúsili zapísať aj iným spôsobom (odvolávajú sa na bežnú prax: „všetci predsa vieme, že 12 hodín je polovica dňa“ a pod.).

Úloha 11

Za základ, samozrejme, považujeme 12 mesiacov. Pri počítaní na dni by veci asi boli zložitejšie, veď mesiace majú rôzne počty dní a podľa toho sú inou časťou roka. Ak to deťom napadne, vysvetlite im to, ak nie, nie je to podstatné.

8 Akú časť úsečky AB tvorí úsečka AC ? Zapíš viacerými spôsobmi.



$$|AC| = \frac{4}{9} |AB|$$



$$|AC| = \frac{5}{8} |AB|$$



$$|AC| = \frac{11}{7} |AB|$$



$$|AC| = \frac{6}{2} |AB| = 3 |AB|$$



9 Doplň.

a Ak jednu tortu rozkrojím na štyri štvrtiny, tak tri torty rozkrojím na 12 štvrtín.

b Ak jednu pizzu rozdelím na šesť častí, tak dve a pol pizze rozdelím na 15 šesťín.

10 Napíš zlomkom, aká časť dňa je:

a 1 hodina $\frac{1}{24}$

c 12 hodín $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

e 3 hodiny $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

b 5 hodín $\frac{5}{24}$

d 6 hodín $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

f 2 hodiny $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$



11 Napíš zlomkom, aká časť roka je:

a 1 mesiac $\frac{1}{12}$

c 6 mesiacov $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

e 3 mesiace $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b 4 mesiace $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d 2 mesiace $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

f 7 mesiacov $\frac{7}{12}$



12 Koľko je to minút?

a $\frac{1}{2}$ hodiny 30 minút

d $\frac{5}{6}$ hodiny 50 minút

b $\frac{1}{5}$ hodiny 12 minút

e $\frac{24}{12}$ hodiny 120 minút

c $\frac{3}{4}$ hodiny 45 minút

f $\frac{7}{12}$ hodiny 35 minút



13 Koľko je to dní?

a $\frac{1}{10}$ júna 3 dni

d $\frac{2}{3}$ júna 20 dní

b $\frac{4}{5}$ júna 24 dni

e $\frac{1}{2}$ júna 15 dní

c $\frac{1}{6}$ júna 5 dní

f $\frac{7}{10}$ júna 21 dní



14 Koľko stál tovar, ak

a $\frac{2}{3}$ z neho stáli 450 eur? 675 eur

225	225	225
-----	-----	-----

450

b $\frac{4}{5}$ z neho stáli 1 000 eur? 1 250 eur

c $\frac{3}{8}$ z neho stáli 240 eur? 640 eur

d $\frac{2}{7}$ z neho stáli 1 400 eur? 4 900 eur

e $\frac{5}{6}$ z neho stálo 180 eur? 216 eur

15 Koľko minút trval celý zápas, ak

a polčas trval 45 minút? 90 minút futbal

b tretina trvala 20 minút? 60 minút hokej

c štvrtina trvala 10 minút? 40 minút basketbal



Úloha 14

Kreslite podobné obrázky a učte žiakov riešiť príklady pomocou nich. Neskôr nebudú mať problémy so slovnými úlohami.

Úlohy na tejto strane sú zoradené od najľahších po ťažšie. Pri prvých úlohách ponúkame obrázok, ktorý pomáha žiakom úlohu vyriešiť. Pri posledných si žiaci musia obrázok nakresliť sami. Učte ich riešiť úlohy o zlomkoch pomocou zmysuplných obrázkov! Jeden takýto obrázok je lepší ako tisíc skvelých postupov, do ktorých žiaci „nevidia“. Posledný príklad je komplikovanejší tým, že tu sa ťažšie kreslí skutočný počet gulôčok (aj keď ani to nie je nemožné) a žiaci musia zovšeobecňovať.

- 16 Maroš prespal 10 hodín. Akú časť dňa bol hore?



- 17 Anka vyfarbila 90° uhol s vrcholom v strede kruhu. Aká časť kruhu zostala nevyfarbená?

Nevyfarbené zostali $\frac{3}{4}$ kruhu.



- 18 Elenka vyšľavala obrázok, na ktorom je 15 kačičiek. Za týždeň sa jej podarilo vyšľaf 5 kačičiek. Akú časť výšľavy ešte musí urobiť?



Ešte musí urobiť $\frac{2}{3}$ výšľavy.

- 19 Z 30 žiakov v triede boli $\frac{2}{3}$ detí na výlete. Koľko žiakov zostalo doma?

výlet



Doma zostalo 10 žiakov.

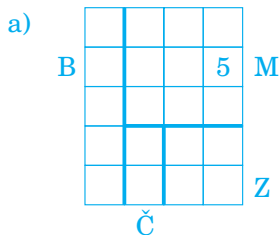
- 20 Pani Hana má v záhrade 24 záhonov. $\frac{3}{8}$ z nich vysadila kvetmi. Akú časť záhonov určila na pestovanie zeleniny? Koľko je to záhonov?



kvety

Na pestovanie zeleniny určila $\frac{5}{8}$ záhonov.
Je to 15 záhonov.

- 21 Mám 100 gulôčok. $\frac{1}{4}$ z nich je biela. $\frac{3}{5}$ zvyšku sú modré. $\frac{1}{3}$ z tých, ktoré nie sú ani modré, ani biele, sú červené a ostatné sú zelené. Koľko mám bielych gulôčok?



$$B = 25$$

$$M = 45$$

$$Č = 10$$

$$Z = 20$$

$$b) B \rightarrow 100 : 4 = 25$$

$$M \rightarrow (100 - 25) : 5 \cdot 3 = 45$$

$$Č \rightarrow (100 - 25 - 45) : 3 = 10$$

$$Z \rightarrow 100 - 25 - 45 - 10 = 20$$

22 V texte podčiarkni všetky zlomky.

Jakubovi chýbajú do konca školského roka ešte tri mesiace. Tretinu z tohto času však v škole nebude. Jeden týždeň stráví na sústredení, dva týždne ešte budú prázdniny a voľno a na jeden týždeň pôjdu do školy v prírode. Jakub sa do školy v prírode teší, aj keď štvrtina jeho spolužiakov asi nepôjde. Zato tam bude desatina učiteľského zboru. Sedminu času školy v prírode sa budú učiť, skoro polovicu spať a oddychovať a zvyšok sa budú hrať. Pätina spolužiakov chce vždy hrať futbal, štvrtina vybijanú a zvyšní piati nechcú hrať nič. A keď sa vrátia zo školy v prírode, prejde ešte desať dní a HURÁ, PRÁZDNINY!!!



23 Čitateľa zlomku zakrúžkuj, menovateľa podčiarkni.

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{15}{22}$

24 Všetky čitatele zorad od najmenšieho po najväčší.

$\frac{12}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{35}{74}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{23}{15}$

$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 12 < 23 < 35$

25 Všetky menovatele zorad od najväčšieho po najmenší.

$\frac{76}{91}$, $\frac{15}{14}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{28}{15}$, $\frac{21}{23}$

$91 > 23 > 15 > 14 > 13 > 9 > 7 > 2$

26 Každého párneho menovateľa zväčši o 3 a nepárneho zmenši o 1.

a $\frac{13}{24}$, $\frac{13}{27}$ c $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$ e $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$ g $\frac{25}{16}$, $\frac{25}{19}$

b $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{2}$ d $\frac{9}{15}$, $\frac{9}{14}$ f $\frac{7}{29}$, $\frac{7}{28}$ h $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{10}$

27 Každého nepárneho čitateľa zväčši 3-krát a párneho zmenši 2-krát.

a $\frac{16}{38}$, $\frac{8}{38}$ c $\frac{22}{7}$, $\frac{11}{7}$ e $\frac{48}{53}$, $\frac{24}{53}$ g $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$

b $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$ d $\frac{7}{15}$, $\frac{21}{15}$ f $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{4}$ h $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$

Úloha 22

Cieľom úlohy je, aby sa žiaci naučili identifikovať zlomky aj v písanom texte. Môžete sa so žiakmi rozprávať o tom, či vedia z textu určiť presný počet žiakov v triede, učiteľov v učiteľskom zbore...

Úloha 23

Úloha 24

Úloha 25

Úloha 26

Úloha 27

Úlohy slúžia na to, aby žiaci vedeli určiť, ktoré z čísel zlomku je jeho čitateľom a ktoré jeho menovateľom.

Úloha 1

V tejto úlohe pracujeme s úsečkou ako celkom, ktorý treba rozdeliť na toľko častí, aké číslo je v menovateli zlomku a z nich vyznačiť toľko častí, aké číslo je v čitateli zlomku. Všimnite si so žiakmi, že polovica úsečky, štyri osminy úsečky, dve štvrtiny úsečky je tá istá časť – už v nasledujúcej kapitole sa budeme venovať rozširovaniu a kráteniu zlomkov.

Úloha 2

Využívame zručnosť z predchádzajúcej úlohy. Teraz za „celok“ považujeme jednotkovú úsečku (teda vzdialenosť obrazu čísla 1 od obrazu čísla nula na jednotkovej osi). Podstatné je, aby si žiaci uvedomili, že pri zlomku, ktorý je väčší ako jedna, budú musieť deliť úsečku medzi obrazom čísla 1 a obrazom čísla 2 na číselnej osi.

Úloha 3

Žiaci si môžu prostredníctvom tejto úlohy uvedomiť, že ku každému zlomku vieme nájsť prirodzené číslo, ktoré je najbližšie menšie a najbližšie väčšie ako daný zlomok. Pýtajte sa žiakov, či táto vlastnosť platí pre ľubovoľný zlomok.

Číselná os

1 Farebne vyznač:

a $\frac{1}{2}$ úsečky

f $\frac{6}{6}$ úsečky

b $\frac{1}{4}$ úsečky

g $\frac{0}{5}$ úsečky

c $\frac{2}{3}$ úsečky

h $\frac{3}{2}$ úsečky

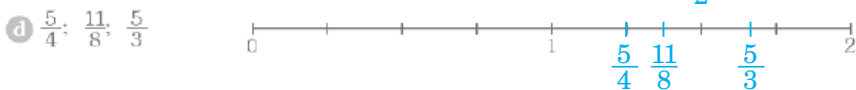
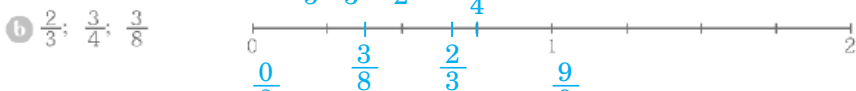
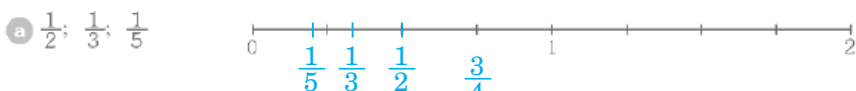
d $\frac{4}{8}$ úsečky

i $\frac{2}{5}$ úsečky

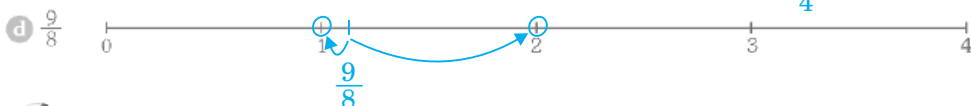
e $\frac{5}{7}$ úsečky

j $\frac{2}{4}$ úsečky

2 Vyznač približne čísla na číselnej osi.



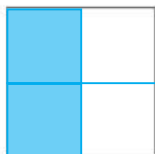
3 Pre každý zlomok vyznač na číselnej osi najbližšie menšie a najbližšie väčšie prirodzené číslo.



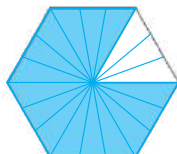
Rozširovanie a krátenie zlomkov

1 Rozšír zlomok daným číslom a znázorni ho.

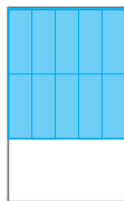
a $2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$



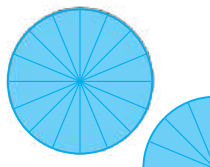
b $3 \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$



c $5 \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$



d $4 \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{20}{16}$



2 Dopln čísla, ktorým je rozšírený každý zlomok.

a $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$

d $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$

g $\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4}$

b $\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{12}{32}$

e $\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{30}{25}$

h $\frac{5 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{25}{45}$

c $\frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{14}{18}$

f $\frac{8 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{48}{24}$

i $\frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$

3 Dopln.

a $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

d $\frac{7}{8} = \frac{42}{48}$

g $\frac{5}{15} = \frac{15}{45}$

b $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

e $\frac{2}{12} = \frac{6}{36}$

h $\frac{13}{13} = \frac{26}{26}$

c $\frac{2}{9} = \frac{10}{45}$

f $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$

i $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$

4 Dopln.

a $\frac{7}{9} = \frac{21}{27}$

d $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$

g $\frac{6}{8} = \frac{42}{56}$

b $\frac{3}{14} = \frac{6}{28}$

e $\frac{1}{9} = \frac{8}{72}$

h $\frac{12}{10} = \frac{24}{20}$

c $\frac{6}{20} = \frac{30}{100}$

f $\frac{4}{5} = \frac{32}{40}$

i $\frac{9}{15} = \frac{18}{30}$

Úloha 1

Rozšíriť daný zlomok na obrázku vlastne znamená „narezať“ danú časť na viac rovnakých častí.

Úloha 2

Trvajte na tom, aby žiaci všade dopísali číslo, ktorým sa rozširuje. Cieľom je, aby si žiaci uvedomili, že rozširovať zlomok znamená násobiť čitateľa i menovateľa tým istým číslom. Neustále si to slovne pripomínajte.



Úloha 5

Opäť „nútime“ žiakov písať číslo, ktorým delíme čitateľa i menovateľa, aby si uvedomili, čo znamená krátiť zlomok daným číslom.

5 Zjednoduš zlomok daným číslom.

a $2 \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{2}{3}$

d $9 \frac{18 : 9}{45 : 9} = \frac{2}{5}$

g $9 \frac{45 : 9}{63 : 9} = \frac{5}{7}$

b $3 \frac{15 : 3}{12 : 3} = \frac{5}{4}$

e $5 \frac{5 : 5}{60 : 5} = \frac{1}{12}$

h $7 \frac{77 : 7}{21 : 7} = \frac{11}{3}$

c $4 \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$

f $6 \frac{36 : 6}{48 : 6} = \frac{6}{8}$

i $3 \frac{18 : 3}{15 : 3} = \frac{6}{5}$

6 Dopln číslo, ktorým sme zjednodušili každý zlomok.

a $\frac{6 : 6}{24 : 6} = \frac{1}{4}$

d $\frac{54 : 2}{56 : 2} = \frac{27}{28}$

g $\frac{30 : 10}{50 : 10} = \frac{3}{5}$

b $\frac{20 : 5}{35 : 5} = \frac{4}{7}$

e $\frac{40 : 10}{120 : 10} = \frac{4}{12}$

h $\frac{39 : 3}{57 : 3} = \frac{13}{19}$

c $\frac{45 : 9}{63 : 9} = \frac{5}{7}$

f $\frac{28 : 7}{42 : 7} = \frac{4}{6}$

i $\frac{48 : 2}{50 : 2} = \frac{24}{25}$

7 Zjednoduš zlomok tak, aby mal daného menovateľa.

a $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

d $\frac{28}{49} = \frac{4}{7}$

g $\frac{18}{48} = \frac{9}{24}$

b $\frac{60}{75} = \frac{12}{15}$

e $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

h $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

c $\frac{45}{90} = \frac{5}{10}$

f $\frac{20}{70} = \frac{2}{7}$

i $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

8 Zjednoduš zlomok tak, aby mal daného čitateľa.

a $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

d $\frac{16}{42} = \frac{8}{21}$

g $\frac{45}{90} = \frac{9}{18}$

b $\frac{54}{81} = \frac{6}{9}$

e $\frac{27}{36} = \frac{9}{12}$

h $\frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

c $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

f $\frac{66}{84} = \frac{11}{14}$

i $\frac{13}{26} = \frac{1}{2}$



9 Ku každému zlomku napíš všetky čísla, ktorými sa dá zjednodušiť.

a $\frac{15}{18}$ 3

e $\frac{27}{207}$ 3, 9

b $\frac{40}{100}$ 2, 4, 5, 10, 20

f $\frac{102}{204}$ 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102

c $\frac{108}{126}$ 2, 3, 6, 9, 18

g $\frac{60}{80}$ 2, 4, 5, 10, 20

d $\frac{52}{92}$ 2, 4

h $\frac{96}{112}$ 2, 4, 8, 16

10 $\frac{6}{10}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{15}{30}, \frac{24}{80}, \frac{99}{66}, \frac{20}{56}, \frac{11}{24}, \frac{60}{132}, \frac{72}{78}, \frac{13}{15}, \frac{36}{90}$



a Spomedzi zlomkov vyber tie, ktoré

sú v základnom tvare.

nie sú v základnom tvare.

$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{11}{24}, \frac{13}{15}$

$\frac{6}{10}, \frac{15}{30}, \frac{24}{80}, \frac{99}{66}, \frac{20}{56}, \frac{60}{132}, \frac{72}{78}, \frac{36}{90}$

b Doplň. Ak je zlomok v základnom tvare, jediným spoločným deliteľom čitateľa a menovateľa je číslo jeden.
Ak zlomok nie je v základnom tvare, majú čitateľ a menovateľ aspoň dva spoločné delitele.

11 Zlomok vyjadri v základnom tvare.

a $\frac{44}{60} = \frac{11}{15}$

c $\frac{128}{80} = \frac{8}{5}$

b $\frac{88}{104} = \frac{11}{13}$

d $\frac{65}{75} = \frac{13}{15}$

12 Usporiadaj čísla vzostupne. 325; 23,5; 3,25; 5,32; 52,3; 253

$3,25 < 5,32 < 23,5 < 52,3 < 253 < 325$



Úloha 9

Pretože žiaci nemajú v rukách nástroje deliteľnosti, hľadanie všetkých riešení môže byť pre niektorých zdĺhavé a nezaujímavé. Preto doporučujeme úlohu zadať ako skupinovú prácu, prípadne ako súťaž: ktorá skupina v najkratšom čase nájde všetky čísla, ktorými sa dajú zjednodušiť zlomky v úlohe.



Úloha 13

Úloha 14

Je na vás, či necháte všetkých žiakov upravovať všetky zlomky do základného tvaru. Bez použitia nástrojov deliteľnosti to môže byť pre menej šikovných žiakov v niektorých prípadoch problém (napr. 360/480). Navrhujeme, aby ste zadávanie jednotlivých zlomkov diferencovali, alebo motivovali žiakov špeciálnou premiou.

13 Zlomok vyjadri v základnom tvare.

a $\frac{48}{112} = \frac{3}{7}$

e $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$

b $\frac{210}{126} = \frac{5}{3}$

f $\frac{360}{480} = \frac{3}{4}$

c $\frac{168}{60} = \frac{14}{5}$

g $\frac{14}{22} = \frac{7}{11}$

d $\frac{176}{330} = \frac{8}{15}$

h $\frac{80}{48} = \frac{5}{3}$

14 Dvojice zlomkov najprv uprav do základného tvaru a potom ich uprav tak, aby mali najmenšieho spoločného menovateľa.



Zlomok	$\frac{80}{96}$	$\frac{170}{200}$	$\frac{45}{150}$	$\frac{140}{300}$	$\frac{72}{168}$	$\frac{63}{108}$	$\frac{24}{32}$	$\frac{100}{175}$	$\frac{45}{72}$	$\frac{21}{126}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{26}{80}$	$\frac{21}{48}$	$\frac{36}{40}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{40}{48}$
Základný tvar	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$
Najmenší spoločný menovateľ	$\frac{50}{60}$	$\frac{51}{60}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{36}{84}$	$\frac{49}{84}$	$\frac{21}{28}$	$\frac{16}{28}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{86}{120}$	$\frac{39}{120}$	$\frac{35}{80}$	$\frac{72}{80}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{20}{24}$

15 Odpovedz.

a Sklenár zasklil za 7 hodín 21 okien. Koľko hodín priemerne mu trvalo zasklenie jedného okna?

$\frac{1}{3}$ hodiny

c 75 jabĺk vážilo 5 kg. Koľko kilogramov vážilo priemerne jedno jablko?

$\frac{1}{15}$ kg

b Jakub šporí na nový bicykel za 300 eur. Aká časť ceny mu ešte chýba, ak má naštrených 225 eur?

$\frac{1}{4}$ ceny

d Z 35 žiakov v triede 15 išlo na výlet. Aká časť žiakov išla na výlet a aká časť zostala v škole?

$\frac{3}{7}$ išli na výlet, $\frac{4}{7}$ ostali doma

Výsledok
zapiš ako zlomok
v základnom
tvare.



16

a $\frac{3}{5}, \frac{7}{10} \rightarrow \frac{6}{10}, \frac{7}{10}$

$$\text{e) } \frac{3}{4}, \frac{5}{20} \rightarrow \frac{15}{20}, \frac{5}{20}$$

b. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6} \rightarrow \frac{9}{12}, \frac{10}{12}$

f $\frac{7}{10}, \frac{3}{8} \rightarrow \frac{28}{40}, \frac{15}{40}$

c. $\frac{2}{6}, \frac{3}{8} \rightarrow \frac{8}{24}, \frac{9}{24}$

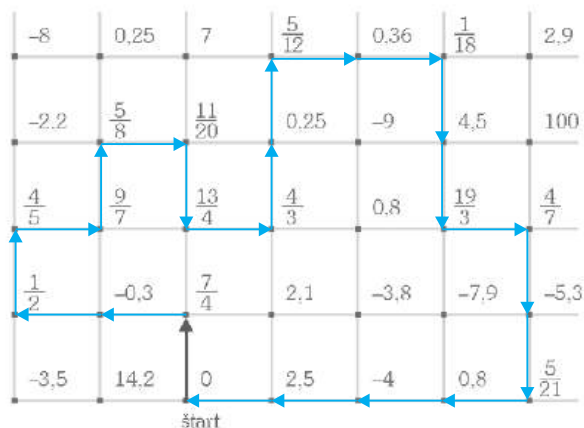
g $\frac{7}{4}, \frac{7}{5} \rightarrow \frac{35}{20}, \frac{28}{20}$

d $\frac{5}{12}, \frac{4}{16} \rightarrow \frac{20}{48}, \frac{12}{48}$

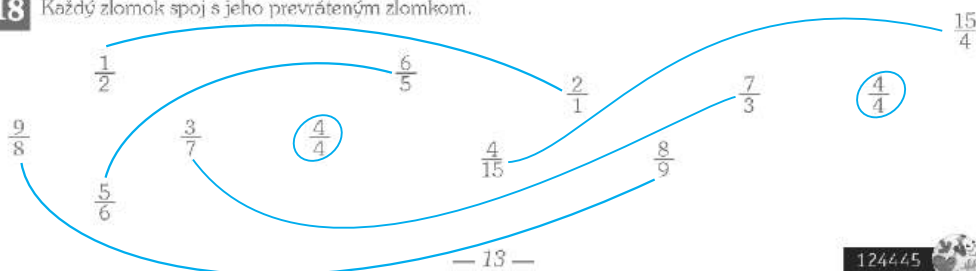
h

$$\frac{2}{3}, \frac{6}{4} \rightarrow \frac{8}{12}, \frac{18}{12}$$

17



18



Úloha 16

Ak máte v triede šikovných žiakov a dostatok času, môžete ich naučiť hľadať najmenšieho spoločného menovateľa ako najmenší spoločný násobok menovateľov pomocou rozkladu na súčin prvočísel. Inak budú hľadať žiaci najmenšieho spoločného menovateľa metódou pokus – omyl.

Úloha 2

V zadaní **a)** rozdelíme celok na rovnaké časti a čím viac týchto častí vezmeme, tým viac máme. V zadaní **b)** berieme rovnako veľa častí, ale čím je menší menovateľ, tým je každá z týchto častí väčšia (lebo sme celok delili na menší počet častí), a teda tým viac berieme. Nakreslite si to. Kto chce, iba vyplní znaky (ne)rovnosti, kto chce, najprv počíta alebo kreslí, podobne ako v úlohe 1.

Kocúr

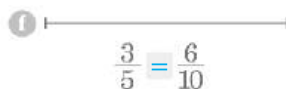
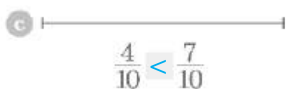
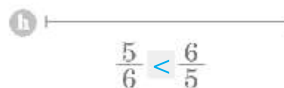
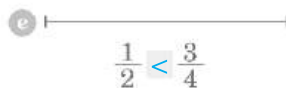
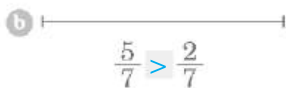
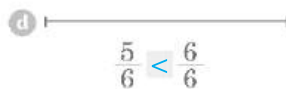
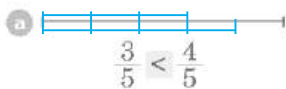
Ide o zovšeobecnenie konkrétnych skúseností, ktoré môže byť pre mnohých náročné.

Úloha 3

Riešenie môžu deti nakresliť, alebo môžu zapísať zlomky v správnom poradí, alebo ku každému zlomku napísať jeho poradie... Každý z týchto spôsobov je rôzne náročný pre deti s rôznymi spôsobmi myslenia.

Porovnávanie a usporadúvanie zlomkov

1 Jeden zlomok znázorni červenou farbou, druhý zelenou. Potom obidva zlomky porovnaj.



2 Porovnaj veľkosť zlomkov.

a $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

$\frac{6}{11} < \frac{9}{11}$

b $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

$\frac{6}{4} > \frac{6}{5}$

$\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$

$\frac{4}{10} > \frac{1}{10}$

$\frac{7}{8} > \frac{7}{9}$

$\frac{2}{3} > \frac{2}{9}$

$\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$

$\frac{5}{5} > \frac{3}{5}$

$\frac{5}{9} > \frac{5}{10}$

$\frac{17}{30} < \frac{17}{20}$

Ktorý z dvoch zlomkov s rovnakými menovateľmi je menší?



Ktorý z dvoch zlomkov s rovnakými číslami je väčší?

S menším číslom.

S menším menovateľom.

3 Zlomky usporiadaj

a od najmenšieho po najväčší.

$\frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{0}{8}, \frac{13}{8}$

$\frac{0}{8} < \frac{1}{8} < \frac{2}{8} < \frac{3}{8} < \frac{5}{8} < \frac{7}{8} < \frac{9}{8} < \frac{13}{8}$

b od najväčšieho po najmenší.

$\frac{8}{12}, \frac{15}{12}, \frac{13}{12}, \frac{10}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{7}{12}$

$\frac{15}{12} < \frac{13}{12} < \frac{10}{12} < \frac{8}{12} < \frac{7}{12} < \frac{5}{12} < \frac{4}{12} < \frac{1}{12}$



4 Doplň tabuľku.

Zlomok	$\frac{\text{Čitateľ}}{\text{Menovateľ}}$	1	Čitateľ	$\frac{\text{Čitateľ}}{\text{Menovateľ}}$	Menovateľ
$\frac{8}{9}$	$<$	1	8	$<$	9
$\frac{13}{13}$	$=$	1	13	$=$	13
$\frac{8}{5}$	$>$	1	8	$>$	5
$\frac{4}{5}$	$<$	1	4	$<$	5
$\frac{2}{2}$	$=$	1	2	$=$	2

Zlomok	$\frac{\text{Čitateľ}}{\text{Menovateľ}}$	1	Čitateľ	$\frac{\text{Čitateľ}}{\text{Menovateľ}}$	Menovateľ
$\frac{9}{4}$	$>$	1	9	$>$	4
$\frac{2}{3}$	$<$	1	2	$<$	3
$\frac{7}{7}$	$=$	1	7	$=$	7
$\frac{9}{5}$	$>$	1	9	$>$	5
$\frac{13}{14}$	$<$	1	13	$<$	14

5 Rozdeľ zlomky do troch skupín.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{6}, \frac{3}{7}, \frac{11}{10}, \frac{13}{12}, \frac{14}{14}, \frac{7}{9}, \frac{8}{6}, \frac{13}{20}, \frac{25}{15}, \frac{1}{1}, \frac{11}{9}, \frac{5}{8}$

Menšie ako 1:

$\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{9}, \frac{13}{20}, \frac{5}{8}$

Rovnajúce sa 1:

$\frac{6}{6}, \frac{14}{14}, \frac{1}{1}$

Väčšie ako 1:

$\frac{5}{4}, \frac{11}{10}, \frac{13}{12}, \frac{8}{6}, \frac{25}{15}, \frac{11}{9}$

6 Doplň.

- a) Ak čitateľ zlomku je väčší ako menovateľ, tak zlomok je **väčší** ako 1.
 b) Ak sa zlomok rovná 1, tak jeho čitateľ **sa rovná** menovateľu.
 c) Každý zlomok menší ako 1 má čitateľa **menšieho** ako menovateľa.

7 Doplň čísla tak, aby zlomok

a) bol menší ako 1:

$\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{10}$

b) sa rovnal 1:

$\frac{1}{1}, \frac{3}{3}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}$

c) bol väčší ako 1:

$\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{7}, \frac{20}{10}$

$\frac{3}{8}, \frac{11}{13}, \frac{18}{20}, \frac{1}{100}$

$\frac{14}{14}, \frac{25}{25}, \frac{300}{300}, \frac{1000}{1000}$

$\frac{3}{2}, \frac{17}{13}, \frac{18}{4}, \frac{550}{100}$

Celá strana je tematicky venovaná porovnávaniu rôznych zlomkov a čísla 1.

Úloha 4

Ukazuje základné pravidlá. Ak má zlomok čitateľa menšieho ako menovateľa, je menší ako 1. Ak má čitateľa väčšieho ako menovateľa, je väčší ako 1.

Úloha 6

Tu si žiaci slovne sformulujú skúsenosti z úloh 4 a 5.

Úloha 7

Pozor – veľa riešení!

Úloha 8

My sme menovatele pri riešení upravovali na najmenšieho spoločného menovateľa. Vaši žiaci tak nemusia urobiť. V konkrétnych prípadoch je lepšie dať prednosť „špecifickej“ úvahe: $3/8$ je menej ako 1, $5/4$ je viac ako 1, takže $3/8 < 5/4$.

Úloha 9

Zlomky porovnávame úpravou na spoločného menovateľa. Niekedy je jednoduchšie najprv zlomky vykrátiť!

Úloha 10

Pripomínajte vašim žiakom správny postup pri usporadúvaní zlomkov s rôznymi menovateľmi: Zlomky upravíme na spoločného menovateľa (ideálne na najmenšieho a spoločného menovateľa). Usporiadame ich podľa veľkosti. V odpovedi zapíšeme usporiadané zlomky v takom tvare, v akom boli v zadaní.

8 Porovnaj.

$$a \quad \frac{3}{8} < \frac{5}{4} \quad \frac{5}{4} = \frac{10}{8} \quad \frac{3}{8} < \frac{10}{8}$$

$$e \quad \frac{4}{3} > \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} = \frac{16}{12} \quad \frac{5}{4} = \frac{15}{12}$$

$$b \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$f \quad \frac{3}{4} > \frac{7}{10} \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad \frac{7}{10} = \frac{14}{20}$$

$$c \quad \frac{4}{10} < \frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$$g \quad \frac{13}{9} < \frac{7}{4} \quad \frac{13}{9} = \frac{52}{36} \quad \frac{7}{4} = \frac{63}{36}$$

$$d \quad \frac{2}{3} > \frac{2}{6} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$h \quad \frac{8}{10} > \frac{4}{6} \quad \frac{8}{10} = \frac{24}{30} \quad \frac{4}{6} = \frac{20}{30}$$

9 Porovnaj.

$$a \quad \frac{3}{9} > \frac{5}{30}$$

$$e \quad \frac{40}{100} < \frac{84}{168} \quad \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \quad \frac{84}{168} = \frac{1}{2}$$

$$b \quad \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

$$f \quad \frac{20}{40} > \frac{18}{54} \quad \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$c \quad \frac{20}{32} < \frac{18}{24}$$

$$g \quad \frac{45}{54} > \frac{42}{108}$$

$$d \quad \frac{49}{20} < \frac{55}{60}$$

$$h \quad \frac{54}{108} > \frac{96}{216}$$

10 Usporiadaj zlomky.

a Od najmenšieho po najväčší:

$$\frac{5}{6}, \frac{3}{18}, \frac{3}{2}, \frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{4}{3} \quad \frac{3}{18} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6} < \frac{11}{12} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$$

b Od najväčšieho po najmenší:

$$\frac{7}{8}, \frac{6}{5}, \frac{20}{40}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10}, \frac{5}{4} \quad \frac{5}{4} > \frac{6}{5} > \frac{11}{10} > \frac{7}{8} > \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

c Od najmenšieho po najväčší:

$$\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{27}{28}, \frac{5}{8}, \frac{9}{14}, \frac{3}{2} \quad \frac{5}{8} < \frac{9}{14} < \frac{3}{4} < \frac{6}{7} < \frac{27}{28} < \frac{3}{2}$$

d Od najväčšieho po najmenší:

$$\frac{13}{30}, \frac{8}{5}, \frac{2}{4}, \frac{9}{12}, \frac{16}{15}, \frac{9}{10} \quad \frac{8}{5} > \frac{16}{15} > \frac{9}{10} > \frac{9}{12} > \frac{2}{4} > \frac{13}{30}$$





Skúšaj
a pozoruj.

11 Čo sa stane so zlomkom, keď čitateľa aj menovateľa zväčšíme o 1?

a $\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{6} < \frac{4}{6}$

b $\frac{5}{5} \quad \frac{6}{6}$

c $\frac{7}{6} \quad \frac{8}{7} \rightarrow \frac{49}{42} > \frac{48}{42}$

$\frac{3}{7} \quad \frac{4}{8}$

$\frac{3}{3} \quad \frac{4}{4}$

$\frac{10}{5} \quad \frac{11}{6}$

$\frac{6}{9} \quad \frac{7}{10}$

$\frac{10}{10} \quad \frac{11}{11}$

$\frac{13}{12} \quad \frac{14}{13}$

Zväčší sa.

Nezmení sa.

Zmenší sa.

12 Doplň vhodné číslo tak, aby platili naznačené nerovnosti.

a $\frac{3}{8} < \frac{7}{7}$

$\frac{21}{56} < \frac{56}{56}$

d $\frac{6}{5} > \frac{8}{9}$

$\frac{54}{45} > \frac{40}{45}$

g $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$\frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{6}{12}$

b $\frac{4}{5} > \frac{3}{6}$

$\frac{24}{30} > \frac{15}{30}$

e $\frac{9}{2} < \frac{25}{5} < \frac{23}{4}$

$\frac{90}{20} < \frac{100}{20} < \frac{115}{20}$

h $\frac{9}{8} > \frac{6}{6} > \frac{3}{4}$

$\frac{27}{24} > \frac{24}{24} > \frac{18}{24}$

c $\frac{0}{2} < \frac{1}{3}$

f $\frac{6}{5} > \frac{41}{34} > \frac{8}{7}$

$\frac{42}{35} > \frac{41}{35} > \frac{40}{35}$

i $\frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \frac{7}{8}$

$\frac{6}{24} < \frac{16}{24} < \frac{21}{24}$

13 Ku každému zlomku napíš väčší zlomok tak, aby mal:

a rovnakého menovateľa,

b rovnakého čitateľa,

c rôzneho čitateľa aj menovateľa.

$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{13}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{35}{15}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{14}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{11}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{6}$

Úloha 11

Je potrebné vypočítať a uvedomiť si oveľa viac príkladov, aby sa pre žiakov tento fakt stal samozrejmosťou. Ale raz treba začať... Diskutujte o tom, ktoré zlomky kam patria.

Úloha 12

Príklad c) nemá v obore prirodzených čísel riešenie. Kofkým z vašich žiakov napadne dopísať číslo -1? To si zaslúži veľkú pochvalu!

Niektorú uprednostní porovnávanie pomocou kreslenia, iný také, aké sme použili my, niektorú úplne iné...

- 14** Objem modrého hrnca je $\frac{5}{7}$ litra a zeleného $\frac{3}{4}$ litra. Ktorý hrniec je väčší?

$$n(7, 4) = 28 \quad \frac{5}{7} = \frac{20}{28} \quad \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

Väčší je zelený hrniec.

- 15** V dielni opravovali dve autá. Auto pána Nováka opravili za $\frac{9}{16}$ hodiny a auto pána Kováča za $\frac{15}{20}$ hodiny. Ktoré auto opravovali dlhšie?

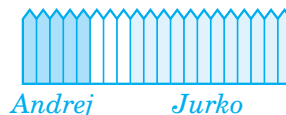
$$n(16, 20) = 80 \quad \frac{9}{16} = \frac{45}{80} \quad \frac{15}{20} = \frac{60}{80}$$

Dlhšie opravovali auto pána Kováča.

- 16** Jurko s Andrejom natierali plot. Jurko doobeda natrel $\frac{3}{5}$ plota a Andrej $\frac{1}{4}$. Ktorý z chlapcov natrel väčšiu časť plota?

$$n(5, 4) = 20$$

Väčšiu časť plota natrel Jurko.



- 17** Danko písala domácu úlohu z matematiky $\frac{7}{14}$ hodiny a zo slovenského jazyka $\frac{3}{4}$ hodiny. Ktorú domácu úlohu robila kratšie?

$$n(14, 4) = 28 \quad \frac{7}{14} = \frac{14}{28} \quad \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

Kratšie robila úlohu z matematiky.

- 18** V Bratislave namerali počas letnej búrky $\frac{5}{6}$ dm zrážok, v Trnave $\frac{7}{10}$ dm a v Košiciach $\frac{4}{5}$ dm. V ktorom meste pršalo najviac a v ktorom najmenej?

$$n(6, 10, 5) = 30 \quad \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \quad \frac{7}{10} = \frac{21}{30} \quad \frac{4}{5} = \frac{24}{30}$$

Najviac pršalo v Bratislave a najmenej v Trnave.

- 19** Od križovatky je k lesu $\frac{7}{10}$ km, na stanicu $\frac{23}{8}$ km, ku škole $\frac{23}{25}$ km a k rybníku $\frac{50}{25}$ km. Ktoré miesto je od križovatky najďalej a ktoré najbližšie?

$$n(10, 8, 25) = 200 \quad \frac{7}{10} = \frac{140}{200} \quad \frac{23}{8} = \frac{575}{200} \quad \frac{23}{25} = \frac{184}{200} \quad \frac{50}{25} = \frac{400}{200}$$

Najďalej je na stanicu a najbližšie k lesu.

- 20** Maliar pri maľovaní bytu spotreboval $\frac{8}{5}$ kg žltej farby, $\frac{14}{8}$ kg zelenej farby a $\frac{7}{4}$ kg modrej farby. Ktorú farbu spotreboval najviac a ktorú najmenej?

$$n(5, 8, 4) = 40 \quad \frac{8}{5} = \frac{64}{40} \quad \frac{14}{8} = \frac{70}{40} \quad \frac{7}{4} = \frac{70}{40}$$

Najviac spotrebovali zelenej a modrej, najmenej žltej.

Zlomky, zmiešané čísla a desatinné čísla

1 Napiš ako zmiešané čísla.

a $\frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$ e $\frac{11}{7} = 1 \frac{4}{7}$ i $\frac{13}{4} = 3 \frac{1}{4}$ m $\frac{110}{11} = 10$

b $\frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$ f $\frac{13}{9} = 1 \frac{4}{9}$ j $\frac{37}{6} = 6 \frac{1}{6}$ n $\frac{120}{2} = 60$

c $\frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}$ g $\frac{25}{11} = 2 \frac{3}{11}$ k $\frac{67}{5} = 13 \frac{2}{5}$ o $\frac{93}{3} = 31$

d $\frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2}$ h $\frac{50}{8} = 6 \frac{1}{4}$ l $\frac{33}{16} = 2 \frac{1}{16}$ p $\frac{200}{7} = 28 \frac{4}{7}$

2 Napiš ako zlomky.

a $3 \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ c $10 \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$ i $7 \frac{4}{5} = \frac{39}{5}$ m $13 \frac{2}{8} = \frac{106}{8}$

b $2 \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ f $7 \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$ j $1 \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ n $6 \frac{4}{9} = \frac{58}{9}$

c $7 \frac{5}{8} = \frac{61}{8}$ g $2 \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$ k $9 \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$ o $2 \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

d $3 \frac{2}{7} = \frac{23}{7}$ h $5 \frac{5}{9} = \frac{50}{9}$ l $15 \frac{1}{3} = \frac{46}{3}$ p $1 \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$

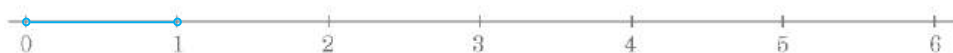
3 Doplň a napiš tri príklady.

Pravý zlomok je **menší** ako jedna.

Nepravý zlomok je **väčší** ako jedna.



4 Vyznač tú časť číselnej osi, kde ležia pravé zlomky.



Úloha 3

Využite miesto a každé tvrdenie „potvrďte“ niekoľkými príkladmi.

Úloha 4

Využite možnosť a povedzte žiakom, že krúžok na konci úsečky, ktorá označuje množinu pravých zlomkov znamená, že čísla 0 a 1 do tejto množiny nepatria, pretože to nie sú pravé zlomky.



Úloha 5

Môžeme rozširovať, ale i krátiť.

Úloha 6

Dá sa to, samozrejme, aj delením (niekedy iba delením). Porovnajte obidva spôsoby.

5 Uprav zlomky tak, aby mali menovateľa 10, 100, 1 000...

$$\text{a } \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$$\text{e } \frac{6}{200} = \frac{3}{100}$$

$$\text{i } \frac{24}{60} = \frac{4}{10}$$

$$\text{b } \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$$

$$\text{f } \frac{10}{50} = \frac{20}{100}$$

$$\text{j } \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$$

$$\text{c } \frac{7}{8} = \frac{875}{1000}$$

$$\text{g } \frac{12}{200} = \frac{6}{100}$$

$$\text{k } \frac{45}{90} = \frac{5}{10}$$

$$\text{d } \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

$$\text{h } \frac{40}{400} = \frac{4}{100}$$

$$\text{l } \frac{150}{250} = \frac{600}{1000}$$

6 Zlomky napíš ako desatinné čísla.

$$\text{a } \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$$

$$\text{e } \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\text{i } \frac{1}{6} = 1 : 6 = 0,1\bar{6}$$

$$\text{b } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\text{f } \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3,5$$

$$\text{j } \frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,4\bar{4}$$

$$\text{c } \frac{6}{10} = \text{---} = 0,6$$

$$\text{g } \frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 0,36$$

$$\text{k } \frac{5}{3} = 5 : 3 = 1,6\bar{6}$$

$$\text{d } \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$\text{h } \frac{9}{8} = \frac{1125}{1000} = 1,125$$

$$\text{l } \frac{1}{7} = 1 : 7 = 0,14285\bar{7}$$

7 Desatinné číslo napíš ako zlomok a uprav ho do základného tvaru.

$$\text{a } 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\text{g } 0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

$$\text{b } 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{h } 1,45 = \frac{145}{100} = \frac{29}{20}$$

$$\text{c } 3,4 = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$$

$$\text{i } 6,4 = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}$$

$$\text{d } 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{j } 0,3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{e } 2,15 = \frac{215}{100} = \frac{43}{20}$$

$$\text{k } 0,6 = \frac{2}{3}$$

$$\text{f } 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\text{l } 0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$



8 Porovnaj znakmi $<$, $>$, $=$.

a $\frac{2}{3} < 3,5$

c $0 < \frac{9}{7}$

e $\frac{1}{4} = 0,25$

g $\frac{3}{4} > 0$

b $\frac{1}{2} < 1,2$

d $0,3 < \frac{1}{3}$

f $\frac{3}{7} > 0,4$

h $2,5 > 2\frac{1}{6}$

9 Čísla usporiadaj.

a Od najmenšieho po najväčšie (vzostupne): $\frac{1}{3}; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \frac{1}{6}; \frac{1}{10}$

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

b Od najväčšieho po najmenšie (zostupne): $\frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{3}; \frac{3}{5}; \frac{3}{11}; \frac{3}{15}; \frac{3}{20}$

$$\frac{3}{2} > \frac{3}{3} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{3}{8} > \frac{3}{11} > \frac{3}{15} > \frac{3}{20}$$

c Od najmenšieho po najväčšie (vzostupne): $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0,025; 0; 0,3; 2\frac{3}{4}; 3\frac{7}{8}; 3,15$

$$0 < 0,025 < 0,3 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 2\frac{3}{4} < 3,15 < 3\frac{7}{8}$$

d Od najväčšieho po najmenšie (zostupne): $0,5; \frac{3}{2}; \frac{4}{4}; \frac{5}{1}; \frac{0}{9}; 1,1; 0,9; 0,2$

$$\frac{5}{1} > \frac{3}{2} > 1,1 > \frac{4}{4} > 0,9 > 0,5 > 0,2 > \frac{0}{9}$$



10 Vysvetli a znázorni zápis $\frac{0}{5}$ a $\frac{5}{0}$.

$\frac{0}{5}$ Nič rozdelíme na päť častí a dostaneme nič. $\frac{0}{5} = 0$

$\frac{5}{0}$ Päť rozdelíme na nula častí a to sa nedá. $\frac{5}{0}$

11 Nájdi informácie o tom, ktoré staroveké civilizácie používali pri výpočtoch zlomky.



Úloha 9

Spomeňte si na úlohu 2 zo s. 14.

Úloha 10

Aj naše vysvetlenia sú diskutabilné, ale v tom je zmysel úlohy. Delenie nuly a delenie nulou je vždy dráždivý problém.

Úloha 11

Zlomky poznali už Babylončania, ale cieľavedome ich používali Egypťania. Dokladá to *Rhindov papyrus* (podľa škótskeho egyptológa Henryho Rhinda, ktorý ho kúpil v Luxore v roku 1858 a v súčasnosti sa nachádza v expozícii Britského múzea), ktorý obsahuje 87 matematických problémov. Na papyrus ich zapísal okolo roku 1650 p. n. l. pisár Ahmes, ktorý vyhlásil, že je kópiou o 200 rokov staršieho dokumentu. Egypťania používali znaky iba pre zlomky jedna polovica, jedna tretina, jedna štvrtina, jedna pätina, atď. Zapisovali ich tak, že nad číslo, ktoré my máme v menovateli, dávali znak, ktorý mal tvar oka. Gréci sa zlomkom usilovali vyhnúť, ale pretože to nie vždy bolo možné, pre niektoré zlomky mali špeciálne označenia.



Úloha 1

Chceli sme žiakom ukázať, že niekedy je výhodnejšie najprv zlomky upraviť do základného tvaru a až potom ich sčítať. Ukážte si také situácie (prípadne nechajte žiakov vymýšľať príklady, kde je to výhodné a príklady, kde nie).

Úloha 2

Príklady tohto typu môžeme počítať tak, že najprv sčítame celé časti a potom zlomkové časti, ako sme riešili zadanie a), alebo tak, že zmiešané čísla upravíme na zlomky a potom zlomky sčítame. Opäť platí, že niekedy sa to oplatí...

Úloha 3

V tomto príklade nie je zatiaľ nutné výsledky upravovať do tvaru zmiešaného čísla. Žiaci by ale mali všetky výsledky upraviť do základného tvaru (čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné čísla).

Sčítanie a odčítanie zlomkov

1 a) Vypočítaj a výsledok uprav do základného tvaru. b) Zlomky uprav do základného tvaru a vypočítaj.

$$\frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{4+6}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{10}{25} + \frac{5}{50} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4+1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{10} - \frac{2}{10} = 1$$

$$\frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{9} + \frac{9}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{8}{10} = 1$$

$$\frac{16}{12} - \frac{8}{12} = 2$$

$$\frac{9}{9} - \frac{3}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{14}{6} - \frac{8}{6} = 2$$

2 a) $9\frac{1}{2} + 8\frac{3}{4} = 17\frac{2+3}{4} = 17\frac{5}{4} = 18\frac{1}{4}$

b) $2\frac{3}{4} + 2\frac{7}{10} = \frac{11}{4} + \frac{27}{10} = \frac{55+54}{20} = \frac{109}{20} = 5\frac{9}{20}$

c) $1\frac{6}{5} + \frac{17}{3} = \frac{118}{15} = 7\frac{13}{15}$

d) $1\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 2\frac{1}{14} = \frac{103}{21} = 4\frac{19}{21}$

e) $3\frac{1}{2} + \frac{6}{8} + \frac{4}{5} = \frac{101}{20} = 5\frac{1}{20}$

3 a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

f) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{5}{21}$

g) $\frac{8}{9} - \frac{1}{2} = \frac{7}{18}$

c) $\frac{14}{15} - \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

h) $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{24}{32} - \frac{9}{36} = \frac{1}{2}$

i) $\frac{44}{48} - \frac{14}{42} = \frac{7}{12}$

e) $\frac{14}{15} - \frac{33}{55} = \frac{1}{15}$

j) $\frac{24}{27} - \frac{14}{24} = \frac{11}{36}$

Výsledky uprav do základného tvaru.



$$4 \quad a \quad 7 - 3\frac{2}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

$$b \quad \frac{44}{5} - 1\frac{1}{6} = \frac{229}{30} = 7\frac{19}{30}$$

$$c \quad 3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$$

$$d \quad 10\frac{2}{7} - \frac{16}{3} = \frac{104}{21} = 4\frac{20}{21}$$

$$e \quad 8\frac{1}{3} - (2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{5}) = \frac{23}{10} = 2\frac{3}{10}$$

$$5 \quad a \quad (1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + 3) - 3\frac{5}{6} = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}$$

$$b \quad 14\frac{9}{10} - (3\frac{1}{2} + 4\frac{9}{10} + 5\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$$

$$c \quad (5\frac{5}{8} - \frac{3}{4}) - (8\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}) = \frac{3}{8}$$

$$6 \quad a \quad \frac{1}{4} + 0,3 + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{37}{20} = 1\frac{17}{20}$$

$$b \quad 6,75 + 7\frac{2}{5} + \frac{14}{4} = \frac{353}{20} = 17\frac{13}{20}$$

$$c \quad 1\frac{3}{4} + 8,4 + \frac{13}{5} = 12,75$$

$$d \quad \frac{2}{5} + 0,8 + 6\frac{5}{6} = \frac{241}{30} = 8\frac{1}{30}$$

$$e \quad \frac{12}{3} + 2,7 + 3\frac{1}{6} = \frac{148}{15} = 9\frac{13}{15}$$



Úloha 4

V tomto, ani v nasledujúcich príkladoch nie je zatiaľ nutné výsledky upravovať do tvaru zmiešaného čísla. Žiaci by ale mali všetky výsledky upraviť do základného tvaru (čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné čísla).

Úloha 6

Nám sa príklad v zadaní c) (aj niektoré ďalšie) lepšie počíta v tvare desatinných čísel. Ak niektorý žiak tiež inklinuje k počítaniu pomocou desatinných čísel, nie je to dôvod na postih. Treba sa so žiakmi porozprávať, že v tejto chvíli, keď „trénujeme“ sčítanie a odčítanie zlomkov, treba všetky príklady riešiť v tvare zlomkov, ale obidva spôsoby sú rovnocenné a zameňiteľné.



7 a $4,2 - \frac{2}{3} = \frac{53}{15} = 3 \frac{8}{15}$

b $0,9 - \frac{5}{6} = \frac{1}{15}$

c $\frac{8}{9} - 0,5 = \frac{7}{18}$

d $3 \frac{3}{4} - 0,4 = \frac{67}{20} = 3 \frac{7}{20}$

e $2,8 - (\frac{5}{6} + \frac{2}{3}) = \frac{13}{10} = 1 \frac{3}{10}$

8 a O koľko je číslo $3 \frac{5}{6}$ menšie ako číslo $4 \frac{5}{9}$?

$\frac{13}{18}$

b O koľko je číslo 7,6 väčšie ako číslo $4 \frac{3}{5}$?

3

c Ktoré číslo musíš odčítať od $3 \frac{1}{4}$, aby bol rozdiel $\frac{2}{5}$?

$\frac{57}{20} = 2 \frac{17}{20}$

d Ktoré číslo musíš pripočítať k 1,2, aby bol súčet $3 \frac{2}{3}$?

$\frac{52}{15} = 3 \frac{7}{15}$

e Aký je rozdiel čísel $\frac{7}{8}$ a $\frac{5}{6}$?

$\frac{1}{24}$

f Aký je súčet čísel $1 \frac{1}{2}$ a $3 \frac{2}{5}$?

4,9

9 Myslí si číslo. Ak ho zmenším o 0,5, potom pripočítam $\frac{1}{3}$, súčet zmenším o $\frac{2}{5}$ a rozdiel zväčším o $\frac{1}{6}$, dostanem 0,3.

$\frac{7}{10} \xrightarrow{-0,5} \frac{1}{5} \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \frac{8}{15} \xrightarrow{-\frac{2}{5}} \frac{2}{15} \xrightarrow{+\frac{1}{6}} 0,3$



Násobenie a delenie zlomkov

1 a $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{14} = 1$

f $\frac{1}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{9}$

b $\frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{2} = 5$

g $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

c $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{11} = \frac{10}{11}$

h $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$

d $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

i $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$

e $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$

j $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{20} = \frac{3}{8}$

2 Vypočítaj.

a $\frac{1}{3}$ z 15 5 $\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1} = 5$

f $\frac{3}{8}$ zo 40 15

b $\frac{1}{4}$ z 200 50

g $\frac{1}{2}$ zo 40 20

c $\frac{2}{5}$ z 20 8 $20 : 5 = 4$
 $4 \cdot 2 = 8$

h $\frac{1}{3}$ zo 6 2

d $\frac{11}{12}$ z 36 33

i $\frac{2}{7}$ zo 14 4

e $\frac{1}{5}$ z 35 7

j $\frac{1}{4}$ zo 7 $\frac{7}{4}$

3 a $\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$

f $5 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9} = 2 \frac{2}{9}$

b $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$

g $3 \cdot \frac{15}{12} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$

c $\frac{3}{20} \cdot 5 = \frac{3}{4}$

h $12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$

d $40 \cdot \frac{5}{8} = 25$

i $\frac{8}{5} \cdot 10 = 16$

e $\frac{9}{10} \cdot 8 = \frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}$

j $\frac{7}{10} \cdot 4 = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5}$

Úloha 2

Príklady sa dajú počítat tak, ako sme ukázali v a) alebo v c). Obidva postupy sú rovnocenné a zameniteľné, ale z pohľadu matematickej perspektívy vašich žiakov je užitočné, aby si zapamätali a stotožnili sa s postupom, ktorý sme ukázali v príklade a). Čas venovaný tejto práci sa vám vráti pri počítaní úloh podobného typu s výrazmi, pri riešení slovných úloh a pod.

Úloha 3

Naučte žiakov krátiť pred násobením.



Úloha 5

Odpoveď „číslo je 4-krát väčšie ako číslo...” je žiakom jasná a zrozumiteľná. Horšie to bude s odpoveďou „číslo je osem tretín-krát väčšie ako číslo...”. Čo však s odpoveďou „číslo je štrnásť pätnástinkrát väčšie ako číslo...”? Overte si, či vaši žiaci vedia správne interpretovať tieto tvrdenia. Vedia napríklad porovnať veľkosti čísla a , keď vedia, že číslo a je (zlomok)-krát väčšie ako číslo b ?

Úloha 6

Počíta sa v druhom stĺpci to isté ako v prvom?

4 Výdeľ. Výsledok uprav do základného tvaru.

a $\frac{1}{7} : 3 = \frac{1}{21}$

i $5 : \frac{5}{6} = 6$

b $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3} = 6 \frac{2}{3}$

g $1 \frac{1}{6} : 2 = \frac{7}{12}$

c $9 : 2 \frac{1}{4} = 4$

h $\frac{3}{8} : 6 = \frac{1}{16}$

d $5 \frac{1}{3} : 2 = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$

i $\frac{8}{13} : 2 = \frac{4}{13}$

e $3 : 2 \frac{1}{6} = \frac{18}{13} = 1 \frac{5}{13}$

i $5 \frac{1}{3} : 4 = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}$

5 Koľkokrát je číslo a väčšie ako číslo b ?

a	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{3}$	1	$4 \frac{1}{4}$	5,6	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{5}$	$4 \frac{3}{4}$
b	3	4	2	6	7	4	5	9	8	10
Odpoveď	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{28}{25}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{19}{40}$

Kresli si!



6 Vypočítaj číslo, ak vieš, že:

Vypočítaj.

a $\frac{1}{2}$ čísla je 5 10

$\boxed{5} \boxed{5}$

$5 \cdot \frac{2}{1} = 10$

b $\frac{5}{6}$ čísla je 20 24

$\overbrace{4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4}^{20}$
24

$20 \cdot \frac{6}{5} = 24$

c $\frac{7}{9}$ čísla je 42 54

$42 \cdot \frac{9}{7} = 54$

d $\frac{1}{4}$ čísla je $\frac{5}{6}$ $\frac{10}{3}$

$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{1} = \frac{10}{3}$

e $\frac{3}{5}$ čísla je $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$

f $\frac{1}{8}$ čísla je $\frac{5}{16}$ $\frac{5}{2}$

$\frac{5}{16} \cdot \frac{8}{1} = \frac{5}{2}$



Slovné úlohy

- 1 Poštár František mal dnes ťažký deň. Doručil tri balíky. Jeden mal hmotnosť $6\frac{3}{4}$ kg, druhý $3\frac{3}{5}$ kg a tretí 0,7 kg. Koľko kg balíkov František doručil?

$$6\frac{3}{4} + 3\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{221}{20} = 11\frac{1}{20}$$

Poštár František doručil $11\frac{1}{20}$ kg balíkov.

- 2 Jano a Karol splavovali Hron. Cesta dolu prúdom im trvala $\frac{5}{6}$ hodiny. Cesta hore prúdom bola o $1\frac{1}{2}$ hodiny dlhšia. Koľko času strávili Jano a Karol v kajaku?

$$\frac{5}{6} + (\frac{5}{6} + 1\frac{1}{2}) = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

V kajaku strávili $3\frac{1}{6}$ hodiny.

- 3 Slon Félix má spolu s kľetkou hmotnosť $2\frac{1}{4}$ t. Akú hmotnosť má slon, ak hmotnosť kľetky je $\frac{3}{5}$ t?

$$2\frac{1}{4} - \frac{3}{5} = \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$$

Slon má hmotnosť $1\frac{13}{20}$ tony.

- 4 Mišo s Petrom súťažili v jedení čokolády. Mišo zjedol v časovom limite $5\frac{3}{7}$ čokolády. Peto zjedol o $\frac{1}{6}$ čokolády menej. Koľko čokolády zjedli chlapci počas súťaže?

$$5\frac{3}{7} + (5\frac{3}{7} - \frac{1}{6}) = \frac{449}{42} = 10\frac{29}{42}$$

Chlapci zjedli $10\frac{29}{42}$ čokolády.



Úloha 1

Typ slovnej úlohy $a + b + c$.

Úloha 2

Typ slovnej úlohy $a + (a + m)$.

Úloha 3

Typ slovnej úlohy $a - b$.

Úloha 4

Typ slovnej úlohy $a + (a - m)$.



Úloha 6

Vypočítajte podobný údaj pre každého žiaka v triede a výsledky štatisticky spracujte (tabuľka, graf, aritmetický priemer atď.). Uvažovali vaši žiaci o Jakubovom výkone?

- 5 Martin prešiel na kolieskových korčuliach za minútu $\frac{1}{3}$ km.

Akú vzdialenosť by prešiel pri nezmenenej rýchlosti za $\frac{3}{4}$ hodiny?

$$\frac{3}{4} \text{ hod} = 45 \text{ min} \quad \frac{1}{3} \cdot 45 = 15$$

Prešiel by 15 kilometrov.

- 6 Cestou do školy urobí Jakub 539 krokov. Koľko je to metrov, ak robí kroky dlhé priemerne $\frac{4}{7}$ metra? Koľko kilometrov „nachodí“ Jakub počas jedného školského roka cestou do školy aj zo školy?



Povedzme,
že do školy chodíš
180 dní v roku.

$$\frac{4}{7} \cdot 539 = 308 \quad 308 \cdot 2 \cdot 180 = 110\,880 \text{ m} = 110,88 \text{ km}$$

Počas školského roka „nachodí“ 110,88 km.

- 7 V kráľovstve *Kišetrímázatrí* odovzdali štyria chlapci papier do zberu.

Janko dostal $111\frac{1}{3}$ dukáta, Miško $228\frac{3}{4}$ dukáta, Petko $195\frac{1}{2}$ dukáta a Robko $146\frac{1}{4}$ dukáta.

Koľko kg papiera doniesol každý chlapec, ak zberňa vykupovala papier po 2,50 dukáta za kilogram?

$$\text{Janko: } 111\frac{1}{3} : 2,5 = \frac{668}{15} = 44,53 \text{ kg} \quad \text{Miško: } 228\frac{3}{4} : 2,5 = \frac{183}{2} = 91,5 \text{ kg}$$

$$\text{Petko: } 195\frac{1}{2} : 2,5 = \frac{391}{5} = 78,2 \text{ kg} \quad \text{Robo: } 146\frac{1}{4} : 2,5 = \frac{117}{2} = 58,5 \text{ kg.}$$

- 8 Koľko figúrok urobí hrnčiar zo $133\frac{1}{3}$ kg hliny, ak na jednu potrebuje $\frac{4}{15}$ kg hliny a pri výrobe má odpad $\frac{1}{20}$ materiálu?

$$\text{Odpad: } 133\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{20}{3} \text{ kg}$$

$$\text{materiál na výrobu: } \frac{400}{3} - \frac{20}{3} = \frac{380}{3} \text{ kg}$$

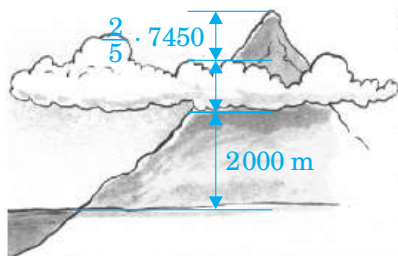
$$\text{figúrok: } \frac{380}{3} : \frac{4}{15} = 285 \text{ ks.}$$



- 9** Vrch má nadmorskú výšku 7 450 m. Vždy ráno je jeho prostredná časť v oblakoch.

Kolko metrov nadmorskej výšky je v oblakoch, ak pod oblakmi je 2 000 m nadmorskej výšky

a nad nimi sú $\frac{2}{5}$ nadmorskej výšky vrchu?

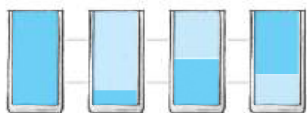


$$\frac{2}{5} \cdot 7450 = 2980 \text{ m}$$

$$7450 - (2980 + 2000) = 2470 \text{ m}$$

V oblakoch je 2470 m vrchu.

- 10** Na Vianoce si rodina Veselá vyrábala gélové sviečky. Otec Veselý zaplnil celý pohár zeleným gélom. Mama Veselá naplnila $\frac{1}{6}$ pohára zeleným gélom a zvyšok červeným. Dcéra použila rovnako veľa zeleného aj červeného gélu a syn nalial do $\frac{1}{3}$ pohára červený gél a do zvyšku zelený. Ktorého gélu minuli viac?



$$\text{Zelený} \quad 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{červený} \quad 0 + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Viac minuli zeleného.

- 11** Rodina Ešteveseľšia si kúpila pozemok s rozmermi $30 \frac{1}{2}$ m a $26 \frac{2}{3}$ m.

Prv než začnú stavať, ho chcú oplotiť. Kolko metrov pletiva musia kúpiť, ak nechajú $2 \frac{7}{8}$ metra na bránu?

$$(30 \frac{1}{2} + 26 \frac{2}{3}) \cdot 2 - 2 \frac{7}{8} = \frac{2675}{24} = 111 \frac{11}{24} \text{ m}$$

Musia kúpiť 112 m pletiva.

- 12** Marek má guľôčky troch farieb. Dve tretiny guľôčok sú zelené, $\frac{2}{7}$ guľôčok modré a jedna guľôčka je žltá. Kolko guľôčok má Marek?

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{20}{21} \quad \frac{1}{21} \dots\dots\dots 1 \text{ guľôčka}$$

$$\frac{21}{21} \dots\dots\dots 21 \text{ guľôčok}$$

Úloha 9

Obrázok nie je iba ilustračný. Ponúka žiakom možnosť znázorniť si údaje (aj to, čo je dané, aj to, čo treba vypočítať) a vzťahy medzi nimi.

Úloha 10

Na znázornenie použitého gélu použite predkreslené poháre.

Úloha 11

Pletivo kupujeme na celé metre.



Úloha 13

Typ slovnej úlohy na zlomky, ktorá sa pohodlne a rýchlo vyrieši, ak si ju žiaci znázornia. Upozorníte ich, že nepotrebujú nevyhnutne zostaviť rovnicu, aby takúto úlohu vyriešili. (Samozrejme, dá sa to aj pomocou rovnice, aj logickou úvahou, aj inými postupmi.) Ukážte si všetky spôsoby, ktoré vaši žiaci nájdu.

Úloha 14

Naše riešenie zachytáva podstatné medzivýsledky riešenia.

Úloha 16

Náročnejšie pre žiakov môže byť uvedomiť si, že jedna tretina záhrady sú vlastne dve šestiny záhrady. Keď sa v úlohe vyskytujú polovice a tretiny, je dobré prejsť do „jazyka šiestín“.

- 13** Na lyžovačku išli $\frac{3}{4}$ triedy. Z tých, ktorí zostali doma, $\frac{1}{3}$ ochorela a zvyšní šiesti boli na matematickom sústreďení. Koľko žiakov má trieda?



$$12 \cdot 3 = 36$$

Trieda má 36 žiakov.

- 14** Bazén široký $10\frac{1}{2}$ m, dlhý 50 m a hlboký 3 m sa naplní za 3 dni. Prvý deň doň natieklo $\frac{2}{5}$ objemu vody, druhý deň $\frac{1}{3}$ zvyšku. Koľko litrov vody natieklo do bazéna tretí deň?

$$\text{a) } V = 10\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 3 = 1\,575\,000 \text{ l} \quad 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} \text{ objemu}$$

$$\frac{2}{5} \cdot 1\,575\,000 = 630\,000 \text{ l}$$

$$\text{b) } \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} \text{ m}$$

$$10\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \frac{6}{5} = 630 \text{ m}^3 = 630\,000 \text{ l}$$

- 15** Na oslavu kráľových narodenín minuli ohňostrojci $\frac{1}{5}$ všetkých zakúpených rakiet. Na oslave kráľovniných narodenín vystrelali $\frac{1}{6}$ zvyšných rakiet a na oslavu následníkových narodenín zostalo 15 000 rakiet. Koľko rakiet nakúpili ohňostrojci?

$$\text{Kráľ} \quad \text{minuli } \frac{1}{5} \quad \text{ostalo } \frac{4}{5}$$

$$\text{Kráľovná} \quad \text{minuli } \frac{2}{15} \quad \text{ostalo } \frac{2}{3} \dots\dots 15\,000 \quad \frac{3}{2} \dots\dots 22\,500$$

Ohňostrojci nakúpili 22 500 rakiet.

- 16** Pán Šťastný vysadil 36,6 metrov štvorcových záhrady trávou. Je to o tretinu záhrady viac ako polovica záhrady. Akú výmeru má záhrada pána Šťastného?



$$(36,6 : 5) \cdot 6 = 43,92 \text{ m}^2$$

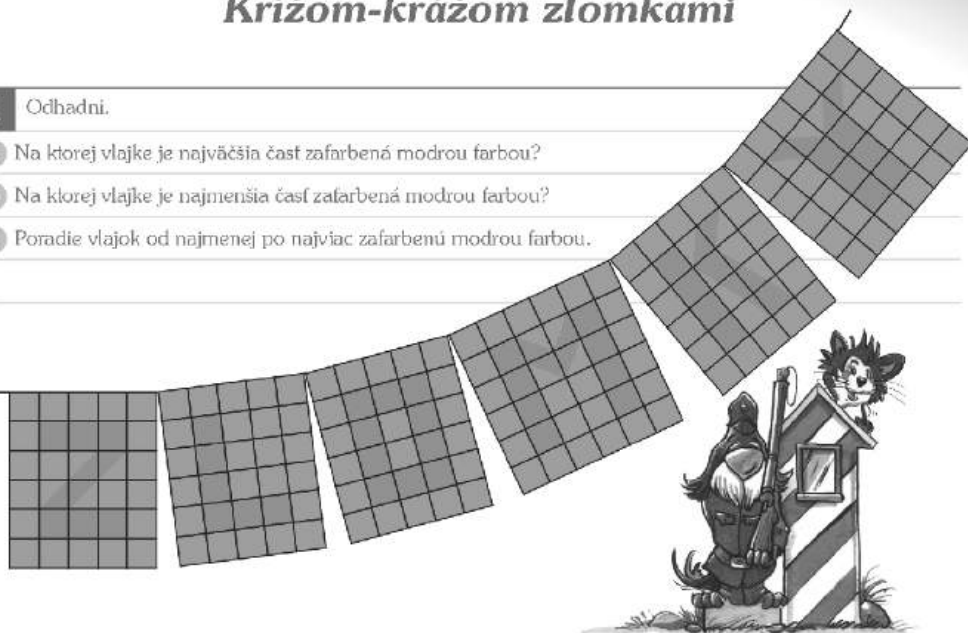
Záhrada má výmeru 43,92 m².



Krížom-krážom zlomkami

1 Odhadni.

- Na ktorej vlajke je najväčšia časť zafarbená modrou farbou?
- Na ktorej vlajke je najmenšia časť zafarbená modrou farbou?
- Poradie vlajok od najmenej po najviac zafarbenú modrou farbou.



2 Napíš odpoveď pre každú vlajku.

	Z	L	O	M	K	Y
a) Z koľkých štvorčekov sa skladá celá vlajka?	30	30	30	36	30	36
b) Z koľkých štvorčekov sa skladá modrá časť?	8	6	10	10	8	8
c) Z koľkých štvorčekov sa skladá červená časť?	22	24	20	26	22	28
d) Aká časť vlajky je modrá?	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{9}$
e) Aká časť vlajky je červená?	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{7}{9}$

3 Odpovedz, keby sme vlajky ušili dvakrát väčšie.

	Z	L	O	M	K	Y
a) Aká časť vlajky by bola modrá?	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{9}$
b) Aká časť vlajky by bola červená?	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{7}{9}$

4 Uprav čísla na chýbajúci tvar.

Zlomok	$\frac{7}{5}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{57}{10}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{64}{50}$	$\frac{43}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{3}{4}$
Zmiešané číslo	$1\frac{2}{5}$	$3\frac{1}{4}$	$\times$	$\times$	$2\frac{7}{8}$	$5\frac{7}{10}$	2	$1\frac{14}{50}$	$8\frac{3}{5}$	$3\frac{2}{5}$	$\times$
Desatinné číslo	1,4	3,25	0,4	$0,\overline{3}$	2,875	5,7	2	1,28	8,6	3,4	0,75

Úloha 1

Podobné úlohy si môže každý vymyslieť, keď na štvorčekový papier napíše napr. svoje meno.

Úloha 2

Môžete porovnávať, ktorá vlajka má najväčšiu časť modrú alebo červenú, sčítovať ich...

Úloha 3

Zväčšením vlajky sa zväčšia aj písmená, teda pomer modrej a červenej časti sa zachová. Ak však niekto nezväčší písmená (a aj tak sa dá zadanie chápať), potom už treba počítat...

Úloha 5

Cieľom je upevniť u žiakov vzťah *zlomok – desatinné číslo – zmiešané číslo*. Nie je dôležité, či je zlomok v základnom tvare alebo nie (záleží na vašej dohode so žiakmi).

Úloha 6

Nezáleží na tom, či budete upravovať zlomky na desatinné čísla alebo desatinné čísla na zlomky.

Úloha 7

Chybný príklad sa dá opraviť viacerými spôsobmi (oprava desatinného čísla, zmena čitateľa alebo menovateľa zlomku...). Opäť skvelá príležitosť diskutovať, argumentovať.

Všimnite si spoločne zadanie g). Ešte stále je to častá chyba, ktorú robia vaši žiaci?

Úloha 8

Nie je dôležité, aby žiaci narysovali presne polohu čísla na číselnej osi. Podstatné je, aby vedeli, že obraz čísla $0,7$ je tam, kde obraz čísla 0 , že obraz čísla $0,4$ je pred obrazom čísla 1 ...

5 Všetky nepravé zlomky napíš v tvare zmiešaných čísel a všetky pravé zlomky ako desatinné čísla.

$$\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{11}{6}, \frac{1}{8}, \frac{41}{9}, \frac{18}{7}, \frac{0}{5}, \frac{3}{13}, \frac{27}{14}, \frac{34}{10}, \frac{4}{18}, \frac{3}{12}, \frac{64}{15}, \frac{11}{21}, \frac{293}{20}$$

Pravé zlomky

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,\bar{3} & \frac{3}{13} &= 0,230769 \\ \frac{2}{5} &= 0,4 & \frac{4}{18} &= 0,\bar{2} \\ \frac{1}{8} &= 0,125 & \frac{3}{12} &= 0,\bar{3} \\ \frac{0}{5} &= 0 & \frac{11}{21} &= 0,523809 \end{aligned}$$

Nepravé zlomky

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} &= 1\frac{1}{4} & \frac{18}{7} &= 2\frac{4}{7} & \frac{293}{20} &= 14\frac{13}{20} \\ \frac{5}{2} &= 2\frac{1}{2} & \frac{27}{14} &= 1\frac{13}{14} \\ \frac{11}{6} &= 1\frac{5}{6} & \frac{30}{10} &= 3 \\ \frac{41}{9} &= 4\frac{5}{9} & \frac{64}{15} &= 4\frac{4}{15} \end{aligned}$$

6 Z každej skupiny čísel vyškrti to, ktoré do nej nepatrí.

a) $\frac{5}{4}$, $1,25$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{9}{8}$ c) $1\frac{3}{4}$, $1,75$, $\frac{8}{4}$, $\frac{14}{8}$ e) $\frac{30}{9}$, $3\frac{3}{9}$, $3,3$, $3\frac{1}{3}$

b) $\frac{12}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $2,5$, $\frac{24}{10}$ d) $5\frac{5}{8}$, $0,625$, $\frac{45}{8}$, $5,625$ f) $1,2$, $\frac{3}{2}$, $1,5$, $1,50$

7 Nájdi nesprávne rovnosti a oprav ich.

a) $\frac{4}{11} = \frac{40}{110}$ ✓

a) $0,7 = \frac{7}{10}$ ✓

b) $5\frac{7}{12} = \frac{67}{12}$ ✓

b) $4\frac{3}{5} \neq \frac{20}{5}$ $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$

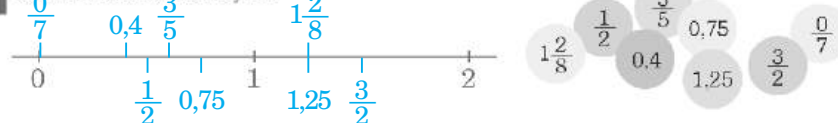
c) $\frac{57}{70} \neq \frac{4}{5}$ $\frac{59}{70} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{0}{7} \neq 0,7$ $\frac{0}{7} = 0$

d) $\frac{100}{7} \neq 14$ $\frac{98}{7} = 14$

d) $2,8 = \frac{14}{5}$ ✓

8 Znázorni čísla na číselnej osi.



9 Porovnaj znakmi $<$, $>$, $=$.

a $0,5 > \frac{9}{27}$

b $0,8 < \frac{55}{60}$

c $6\frac{5}{6} > 6,75$

d $1,7 < 1\frac{4}{5}$

e $\frac{3}{9} > 0,1\bar{6}$

f $0,4 < \frac{84}{189}$

g $\frac{20}{9} < 2\frac{1}{3}$

h $3\frac{3}{20} = 3,15$

10 Usporiadaj vzostupne.

a $\frac{24}{25}$; $0,7$; $\frac{13}{20}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{87}{50}$; $0,65$ — $\frac{13}{20} = 0,65 < 0,7 < \frac{4}{5} < \frac{24}{25} < \frac{87}{50}$

b $3\frac{1}{4}$; $1\frac{2}{3}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{27}{8}$; $1\frac{3}{4}$ — $1\frac{2}{3} < 1\frac{3}{4} < 3\frac{1}{4} < \frac{27}{8} < \frac{7}{2}$

11 Usporiadaj zostupne.

a $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{6}{9}$; $0,6$; $0,375$; $\frac{4}{6}$ — $\frac{6}{9} = \frac{4}{6} > 0,6 > \frac{1}{2} > 0,375 > \frac{1}{4}$

b $\frac{3}{1}$; $0,25$; $\frac{5}{14}$; $\frac{9}{28}$; $\frac{1}{7}$; 2 ; $\frac{3}{8}$ — $\frac{3}{1} > 2 > \frac{3}{8} > \frac{5}{14} > \frac{9}{28} > 0,25 > \frac{1}{7}$

Úloha 9

Žiakom sa asi bude lepšie porovnávať tak, že upravia zlomok na desatinné číslo. Aj my sme tak porovnávali :).

Úloha 10 Úloha 11

Pri takýchto úlohách je potrebné upraviť všetky čísla do rovnakého tvaru – alebo na zlomky s rovnakým menovateľom a potom poradiť určíme podľa ich čitateľov, alebo na desatinné čísla. Prípad od prípadu a žiak od žiaka sa bude líšiť, kto si aký spôsob vyberie. Podstatné je, aby vo výslednom usporiadaní boli čísla v takom tvare, v akom boli v zadaní.

Úloha 12

Toto je jedna z mála úloh, v ktorej chceme, aby ju žiaci vyriešili bez použitia kalkulačky. Je zameraná najmä na sčítanie zlomkov spamäti. Môžete zaradiť niekoľko výziev:

- kto nájde najviac súčtov,
- kto nájde všetky súčty,
- kto v danom časovom intervale nájde najviac súčtov,
- kto nájde prvých 5 (10, 15...) súčtov.

Úloha 13

V magickom štvorci platí: ak všetky čísla zväčšíme/zmenšíme niekoľkokrát (o niekoľko), štvorec ostane magickým. Už na prvom stupni ZŠ sme do našich pracovných materiálov pre žiakov zaradili niekoľko úloh, ktoré demonštrovali túto myšlienku. Ak si žiaci nespomenú, zaradte pred riešenie tejto úlohy inú, pomocou ktorej si túto základnú myšlienku pripomeniete.

Úloha sa dá, samozrejme, riešiť aj sčítaním a odčítaním daných zlomkov – a dosť sa pri tom natrápate. Iná cesta je vynásobiť čísla v štvorci menovateľom (tým sa dostanete do oboru prirodzených čísel), tu nájsť riešenie a potom už len vydeliť výsledky hodnotou menovateľa.

Ak máte dostatok času, nechajte žiakov „vytrápiť sa“ prvým spôsobom a potom im ukážte ten druhý.

Úloha 14

Pripomeňte si so žiakmi poradie počítania – najprv treba vypočítať príklady v zátvorkách a potom zvyšok.

- 12** Vyznač horizontálne, vertikálne alebo diagonálne skupiny susediacich zlomkov, ktorých súčet je 1.

$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Kto nájde
všetkých 26
možností?

- 13** Doplň magický štvorec.

$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$	1	$\frac{7}{5}$
$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

- 14** a $(5\frac{7}{8} - \frac{5}{8}) - (8\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}) = \frac{3}{4}$

b $1\frac{1}{2} - 0,75 + \frac{1}{6} + (1\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$

c $1,75 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

d $(\frac{5}{7} - \frac{3}{21}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{19}{70}$

e $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) : \frac{5}{6} + (\frac{3}{4} + \frac{3}{8}) \cdot \frac{8}{9} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$



15 Výdel s pomocou kalkulačky a zaokrúhli na dve desatinné miesta.

a $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = 0,3 \div 0,33$

d $\frac{15}{8} : \frac{25}{4} = \frac{3}{10} = 0,3$

b $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{21}{8} \div 2,63$

e $\frac{7}{10} : \frac{14}{15} = \frac{3}{4} = 0,75$

c $\frac{3}{5} : \frac{4}{9} = \frac{27}{20} \div 1,35$

f $\frac{12}{7} : \frac{8}{5} = \frac{15}{14} = 1,07$

16 Vypočítaj s pomocou kalkulačky.

a $1 \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{9}{8} = 1 \frac{1}{8}$

b $\frac{7}{5} - \frac{2}{3} = \frac{11}{15}$

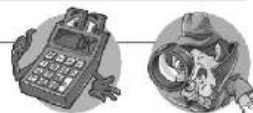
c $4 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{1}{3} = 15$

d $14 : \frac{1}{4} = 56$

e $3 \frac{5}{9} - \frac{4}{7} - 1 \frac{4}{7} = \frac{89}{63} = 1 \frac{26}{63}$

f $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} : 0,3 = 1$

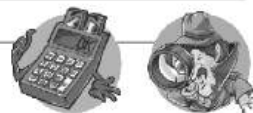
17 Myslím si číslo. Ak ho zmenším 3-krát, podiel zväčším o $\frac{5}{6}$ a súčet zmenším 0,5-krát, dostanem $2 \frac{1}{7}$. Ktoré číslo si myslím?



$$\frac{5}{7} \xrightarrow{:3} \frac{5}{21} \xrightarrow{+\frac{5}{6}} \frac{15}{14} \xrightarrow{:0,5} 2 \frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{7}$$

18 Myslím si číslo. Ak ho zmenším o $\frac{3}{2}$, rozdiel zväčším o $\frac{5}{6}$, súčet vynásobím $\frac{3}{4}$ a súčin zmenším 1,5-krát, dostanem číslo $2 \frac{2}{3}$. Ktoré číslo si myslím?



$$6 \xrightarrow{-\frac{3}{2}} \frac{27}{6} \xrightarrow{+\frac{5}{6}} \frac{16}{3} \xrightarrow{\cdot \frac{3}{4}} 4 \xrightarrow{:1,5} \frac{8}{3}$$

$$6$$

Úloha 15 Úloha 16

Nechajte žiakov porovnať efektívnosť a hlavne presnosť riešenia takýchto príkladov „v reči zlomkov“ a „v reči desatinných čísel“, do ktorej sa pravdepodobne dostanú, keď ich začnú počítať pomocou kalkulačky. Diskutujte s nimi o tom, kedy je výhodné a vhodné použiť jednotlivé spôsoby počítania a hlavne si stanovte pravidlá: aké výpočty akceptujete vy od nich.

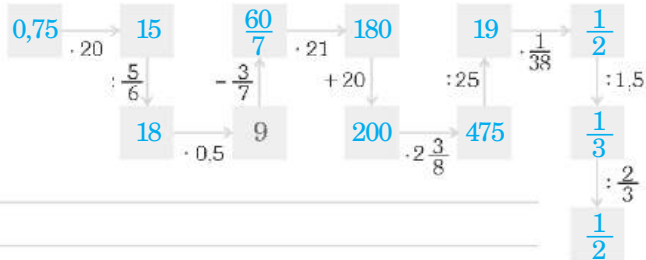
Úloha 19

Vypočítajte tak, že (1) upravíte všetky čísla na zlomky, (2) všetky čísla upravíte na desatinné čísla (v prípade potreby zaokrúhlite na 2 desatinné čísla). Porovnajete presnosť výsledku. Nechajte žiakov vopred tipovať – budú výsledky pri oboch spôsoboch výpočtu alebo sa budú líšiť? Diskutujte s nimi o tom, kedy je vhodné použiť počítanie s desatinnými číslami a zaokrúhľovaním (potrebujeme iba odhadnúť veľkosť výsledku a potrebujeme to urobiť rýchlo) a kedy je potrebné počítať so zlomkami (potrebujeme presný výsledok). Je dôležité, aby vaši žiaci vedeli, aký spôsob počítania od nich očakávajú vy.

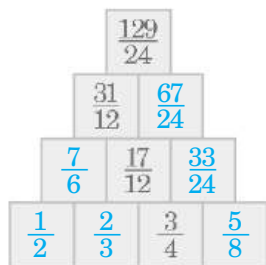
Úloha 20

Podobné úlohy môžete vymýšľať aj vy, ale hlavne vaši žiaci. Nechajte im vyskúšať si, že zostavíť takúto „zlomkovú“ pyramídu tak, aby v nej vychádzali „slušné“ zlomky, nie je úplne jednoduché. A ak sa im to podarí, oceňte ich snahu.

19 Doplň. Zaokrúhli na dve desatinné miesta.



20 Doplň chýbajúce čísla, ak v tehličke je súčet čísel z tehličiek pod ňou.



21 Zakrúhli na dve desatinné miesta.

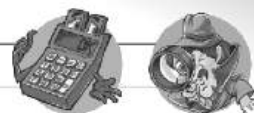


a) $(\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{24}) : (2\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{16}) = \frac{4}{15} \doteq 0,2\bar{7}$

b) $\frac{27}{35} \cdot 8\frac{2}{5} : \frac{21}{25} = \frac{54}{7} \doteq 7,71$

c) $\frac{35}{27} \cdot 5\frac{3}{5} : \frac{14}{9} = \frac{14}{3} \doteq 4,67$





22 Vypočítaj. Zaokrúhli na dve desatinné miesta.

a $3 \frac{1}{8} : [(4 \frac{5}{12} - 3 \frac{13}{24}) \cdot \frac{4}{7} + (3 \frac{1}{18} - 2 \frac{7}{12}) \cdot 1 \frac{10}{17}] = \frac{5}{2}$

b $[(\frac{5}{12} + \frac{17}{30} + \frac{17}{20}) \cdot 60 - 55 \frac{3}{4}] \cdot \frac{4}{7} - 31 = 0$

c $\frac{(\frac{7}{15} + \frac{14}{45} + \frac{2}{9}) \cdot 10 \frac{1}{3} - 1 \frac{1}{11} \cdot (2 \frac{2}{3} - 1 \frac{3}{4})}{(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}) : \frac{3}{28} - 1} = 14$

23 Mama napiekla na večeru buchty. Otec zjedol tretinu z nich. Potom prišiel Jurko a zjedol štvrtinu zo zvyšných buchiet. Po Jurkovi jedol Martin, ktorý zjedol tretinu zo zvyšných buchiet. Anka zjedla polovicu zostávajúcich buchiet a mame zostali štyri buchty. Koľko buchiet napiekla mama a koľko zjedol každý člen rodiny?

Úlohu si znázornil



2	2	

Martin

Anka

mama

Janko

$12 : 2 = 24$

Všetkých buchiet bolo 24.

Úloha 22

Naozaj pre „fajnšmekrov“.
Máte takých v triede?

Úloha 23

Takéto riešenie sa nám zdá elegantnejšie a najmä jednoduchšie ako rovnica:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x) - \\ - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x)) - \\ - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x) - \\ - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x))) = 4 \end{aligned}$$

(x je počet buchiet, ktoré mama upiekla na večeru).
Naozaj – napísali sme ju správne?



24 Vypočítaj.

a Ktorým číslom treba vydeliť treťinu, aby bol výsledok tri?

$$\frac{1}{9}$$

d Koľko šesťín je jedna polovica?

$$3$$

b Koľko sú tri pätiny z jednej desatiny?

$$\frac{3}{50}$$

e Koľkokrát je štvrtina osminy menšia ako tretina šesťtiny?

$$\frac{16}{9}$$

c O koľko je väčšia tretina polovice ako pätina štvrtiny?

$$o \frac{7}{60}$$

f Ktoré číslo je na číselnej osi v strede medzi štvrtinou pätiny a polovicou treťiny?

$$\frac{7}{20}$$

25 Stavba tvaru kocky je postavená z malých kociek troch farieb.

Červených je $\frac{13}{72}$ zo všetkých kociek, modrých $\frac{25}{48}$ zo všetkých kociek a zelených 516.
Koľko je červených a modrých kociek a z koľkých kociek je postavená celá stavba?

$$1 - \left(\frac{13}{72} + \frac{25}{48} \right) = \frac{43}{144} \text{ zelených 516}$$

$$\frac{13}{72} \text{ červených 312}$$

$$\frac{25}{48} \text{ modrých 900}$$

spolu 1 728

26

V mravenisku žijú tri milióny mravcov. Pri poslednom sčítaní obyvateľstva zistili, že na každých 400 mravcov pripadla 1 voška. Na koľko mravcov pripadne jedna voška o dva dni, keď každým dňom sa počet mravcov znižuje o $\frac{3}{250}$ z počtu mravcov a počet vošiek sa zväčšuje o $\frac{1}{25}$ z počtu vošiek?



Deň D 3 000 000 mravcov

7 500 vošiek

$$\text{deň D} + 1 \quad \frac{247}{250} \cdot 3\,000\,000 = 2\,964\,000$$

$$\frac{26}{25} \cdot 7\,500 = 7\,800$$

$$\text{deň D} + 2 \quad \frac{247}{250} \cdot 2\,964\,000 = 2\,928\,432$$

$$\frac{26}{25} \cdot 7\,800 = 8\,112$$

Na každých 361 mravcov pripadne 1 voška.



Ak si odmyslíme veľmi bežné používanie slov *polovica*, *tretina*, *štvrtina* a podobne, musíme priznať, že zlomky sa v praktickom živote nepoužívajú často. Málokto v obchode kupuje dve desatiny kilogramu šunky a málokto sa priznáva, že päť osmín času venovaného príprave do školy sa pozeral zasnene von oknom. Jedným z dôvodov sú aj kalkulačky, ktoré so zlomkami nie sú práve v najpriateľskejšom vzťahu. Zato matematici zlomky milujú. Možno aj preto, že pomocou zlomkov sa dajú veľmi jednoduchým spôsobom vyjadriť hlboké myšlienky. Napríklad myšlienky o nekonečne. Stačí sčítovať nekonečne veľa zlomkov. Ako? Tak, že do súčtu pridáme tri bodky.

S kús vypočítať nekonečný súčet $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$

Rada: Najskôr si napíš niekoľko ďalších sčítancov.

Vypočítaj najprv $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, potom $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, potom $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ atď. Všimaj si výsledky.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

Teraz už vieš, ako odhadnúť takýto nekonečný súčet zlomkov. Skús odhadnúť ešte dva.

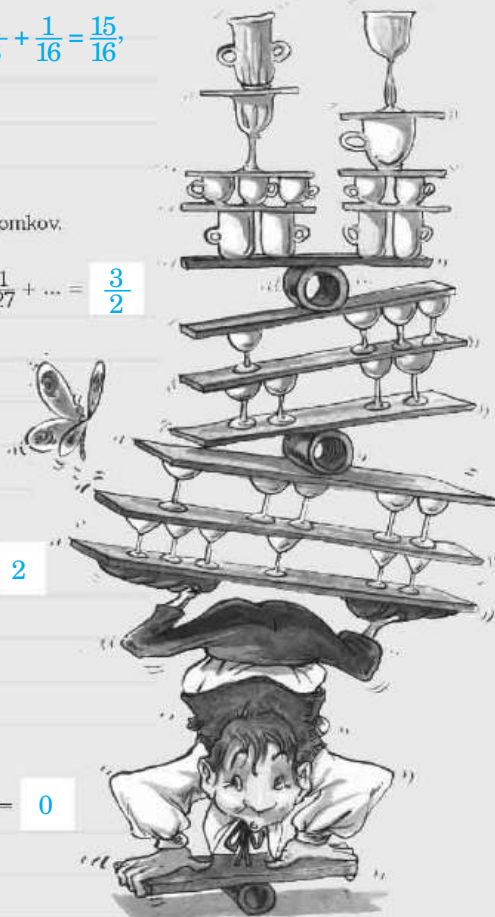
a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \dots = \frac{4}{3}$ b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{3}{2}$

Doteraz boli v každom čitateli jednotky.

Poradíš si, ak to bude inak? $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = 2$

A ešte jeden príklad s odčítaním.

Čo myslíš, aký bude výsledok? $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots = 0$



Cieľom tejto strany nie je naučiť žiakov sčítavať nekonečné rady, ale ukázať im, ako možno pomocou zlomkov vytvárať predstavu o nekonečne.

Prvý súčet sa dá nájsť pomerne ľahko. Pravdepodobne žiaci nájdu výsledok sami. Pre vás: je to geometrický rad s kvocientom $\frac{1}{2}$

a jeho súčet je $\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

V druhej úlohe sú to opäť dva geometrické rady, v zadaní

a) je kvocient $\frac{1}{4}$ a súčet je $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$,
v zadaní b) je kvocient $\frac{1}{3}$
a súčet $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

V tretej úlohe žiaci pri trpezlivom počítaní iste zistia, že súčet sa blíži k číslu 2. Pre zaujímavosť uvádzame schému, ktorá je vlastne rozpísaním súčtu nekonečne veľa zlomkov na nekonečne veľa súčtov nekonečne veľa zlomkov. Súčty vieme určiť na základe výsledkov predchádzajúcich úloh a sčítavať nekonečne veľa výsledkov sme sa naučili v prvej úlohe. Nie je to nekonečne zaujímavé?

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = a : (1 - q)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{4}$$

$$\dots \quad \quad \quad 2$$

V prvých častiach tejto kapitoly sa venujeme nácviku techniky počítania, ktorú potom uplatňujeme v podkapitole Slovné úlohy. Úlohy na tejto strane ukazujú vzájomný vzťah zlomok – desatinné číslo – percento, upevňujú zručnosti, ktoré žiaci využijú neskôr.

2 Percentá



1 Zapiš chýbajúcimi spôsobmi.

Zlomok	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{5}$
Desatinné číslo	0,5	0,25	0,3	0,625	0,7	0,55	0,9	0,01	0,75	1,2
Zlomok s menovateľom 100	$\frac{50}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{62,5}{100}$	$\frac{70}{100}$	$\frac{55}{100}$	$\frac{90}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{120}{100}$

2 Vypočítaj jednu stotinu z každého čísla.

Číslo	300	70	25	48	650	3700	8	0,3	50,5	0,24
Stotina	3	0,7	0,25	0,48	6,5	37	0,08	0,003	0,505	0,0024

3 Dopln.

Číslo	400	20	3000	570	14	2600	1380	31	4500	770
Stotina	4	0,2	30	5,7	0,14	26	13,8	0,31	45	7,7

4 Vypočítaj.

a $\frac{1}{2}$ z 50	25	d $\frac{1}{4}$ z 1 600	400	g $\frac{3}{10}$ z 2 060	618	j $\frac{9}{16}$ z 336	189
b $\frac{1}{3}$ z 9,9	3,3	e $\frac{1}{5}$ z 2 705	541	h $\frac{11}{20}$ z 200	110	k $\frac{3}{7}$ zo 154	66
c $\frac{1}{6}$ z 3,6	0,6	f $\frac{2}{7}$ z 0,35	0,1	i $\frac{4}{13}$ z 325	100	l $\frac{8}{9}$ zo 63	56

5 Vypočítaj.

a 0,3 z 15	4,5	d 1,5 z 200	300	g 0,13 zo 7	0,91	j 0,8 z 36	28,8
b 0,5 zo 68	34	e 3,06 z 0,8	2,448	h 3,8 zo 600	2280	k 0,22 zo 424	93,28
c 0,2 z 20	4	f 0,24 z 500	120	i 2,6 z 3,4	8,84	l 4,4 zo 16	70,4

6 Nájdi číslo, z ktorého:

a $\frac{1}{2}$ je 25	50	d $\frac{1}{4}$ je 6,5	26	g $\frac{5}{6}$ je 5,5	6,6	j 0,25 je 7	35
b $\frac{1}{3}$ je 50	150	e $\frac{1}{7}$ je 0,3	2,1	h 0,4 je 56	140	k 1,5 je 15	10
c $\frac{1}{6}$ je 12	72	f $\frac{2}{5}$ sú 22	55	i 0,6 je 3,6	6	l 3,2 je 64	20



Percento

1 Pre každé z čísel urči jedno percento.

- | | | | | | | | |
|-------|------|---------|-------|---------|-------|--------|---------|
| a 200 | 2 | d 516 | 5,16 | g 6 438 | 64,38 | j 0,4 | 0,004 |
| b 305 | 3,05 | e 1 200 | 12 | h 2 004 | 20,04 | k 3,15 | 0,0315 |
| c 428 | 4,28 | f 4 203 | 42,03 | i 5,7 | 0,057 | l 0,09 | 0,000 9 |

2 Napíš, koľko je 100 %, ak je dané jedno percento.

- | | | | | | | | |
|-----|-----|------|-------|-------|--------|---------|-----|
| a 7 | 700 | d 8 | 800 | g 56 | 5 600 | j 0,2 | 20 |
| b 6 | 600 | e 15 | 1 500 | h 305 | 30 500 | k 0,24 | 24 |
| c 3 | 300 | f 38 | 3 800 | i 0,4 | 40 | l 0,005 | 0,5 |

3 Vyjadri v percentách.

- | | | | |
|---------------------|------|------------------------|--------|
| a polovica žiakov | 50 % | d pätina úspor | 20 % |
| b štvrtina áut | 25 % | e osmina stromov | 12,5 % |
| c desatina zákuskov | 10 % | f stotina vzdialenosti | 1 % |

4 Vypočítaj 1 % a napíš ho v daných jednotkách.

- | | | | | | |
|--------|----|----|---------------------|-----|-----------------|
| a 1 m | 1 | cm | f 1 g | 10 | mg |
| b 1 kg | 10 | g | g 1 m ² | 100 | cm ² |
| c 1 l | 10 | ml | h 1 t | 10 | kg |
| d 1 km | 10 | m | i 1 hl | 10 | dl |
| e 1 dm | 1 | mm | j 1 dm ³ | 1 | cm ³ |

5 V každej skupine vyznač dĺžku, ktorej 1 % je najdlhšie.

- | | |
|--|---|
| a 1 km; 1 500 m; 6 200 dm
10 m; 15 m; 6,2 m | c 0,2 km; 130 m; 11 000 cm
2 m; 1,3 m; 1,1 m |
| b 450 cm; 23 dm; 6 240 mm
45 mm; 23 mm; 62,4 mm | d 0,5 m; 0,2 dm; 0,006 km
0,5 cm; 0,2 cm; 6 cm |

6 Vypočítaj.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a $3,5 + 16,9 = 20,4$ | c $305,04 \cdot 0,1 = 30,504$ |
| b $106,12 - 58,3 = 47,82$ | d $29,6 : 0,01 = 2 960$ |



7 Výsledok napíš v percentách.

- a Z celkového počtu žiakov školy je dievčat 56 %. Chlapcov je **44** %.
- b 29 % povrchu Zeme je súš. Oceány pokrývajú **71** % povrchu Zeme.
- c 10 % územia Islandu pokrývajú ľadovce. **90** % územia je nezaľadnených.

8 Znázorni na úsečkách vybavenie domácností Slovenska podľa sčítania obyvateľov domov a bytov, ktoré sa pod patronátom ŠÚ SR konalo v máji 2001.

- a 93 % domácností má kúpeľňu alebo sprchovací kút kúpeľňa, sprchovací kút
- b 61 % domácností má automatickú práčku automatická práčka
- c 76 % domácností má ústredné kúrenie ústredné kúrenie
- d 39 % domácností má osobný automobil osobný automobil

9 Vyfarbi:

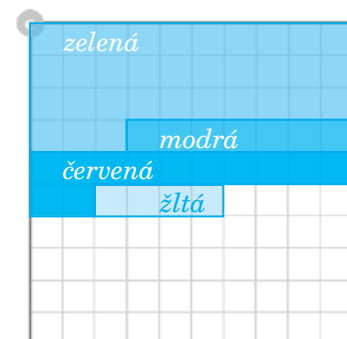


- a 20 % modrou,
40 % zelenou,
40 % nevyfarbených.

- b 15 % červenou,
20 % modrou,
5 % zelenou,
60 % nevyfarbených.

- c 33 % zelenou,
12 % červenou,
7 % modrou,
4 % žltou,
44 % nevyfarbených.

- d 10 % žltou,
20 % zelenou,
30 % modrou,
40 % červenou,
0 % nevyfarbených.



Časť prislúchajúca počtu percent

1 Vypĺň tabuľku.

	1 %	5 %	10 %	25 %	40 %	63 %	71 %	80 %	95 %	105 %
300	3	15	30	75	120	189	213	240	285	315
1 500	15	75	150	375	600	945	1065	1200	1425	1575
618	6,18	30,9	61,8	154,5	247,2	389,34	438,78	494,4	587,1	648,9
5 420	54,2	271	542	1355	2168	3414,6	3848,2	4336	5149	5691
25	0,25	1,25	2,5	6,25	10	15,75	17,75	20	23,75	26,25
7	0,07	0,35	0,7	1,75	2,8	4,41	4,97	5,6	6,65	7,35
0,8	0,008	0,04	0,08	0,2	0,32	0,504	0,568	0,64	0,76	0,84
35,5	0,355	1,775	3,55	8,875	14,2	22,365	25,205	28,4	33,725	37,275
0,39	0,0039	0,0195	0,039	0,0975	0,156	0,2457	0,2769	0,312	0,3705	0,4095
5,6	0,056	0,28	0,56	1,4	2,24	3,528	3,976	4,48	5,32	5,88

2 Vypočítaj.

a 35 % z 80 eur	28	e 22 % z 50 ton	11	i 120 % zo 60 kg	72
b 99 % z 200 hodín	198	f 1,5 % z 200 minút	3	j 300 % z 9 ha	27
c 5 % zo 40 litrov	2	g 56 % z 80 metrov	44,8	k 150 % z 38 dm	57
d 5 % zo 40 m ²	2	h 70 % zo 16 km	11,2	l 0,3 % z 15 mg	0,045

3 Graeme Hurry z Anglicka drží svetový rekord v dĺžke kempovania.

Kolko nocí strávil nepretržite pod holým nebom, sa dozvieš, ak dekoduješ odpovedi.

50 % zo 44	22	S	100 % zo 45	45	D	180 % z 35	63	A
75 % zo 64	48	R	150 % z 24	36	O	175 % z 20	35	Š
80 % z 25	20	I	5 % z 20	1	C	90 % zo 150	135	Ľ
25 % zo 40	10	E	10 % z 80	8	T	120 % z 80	96	Y
						250 % z 10	25	í

T I S Í C Š T Y R I S T O Š E S Ť D E S I A T
8 20 22 25 1 35 8 96 48 20 22 8 36 35 10 22 135 45 10 22 20 63 8

Úloha 1

Zaradením veľkej tabuľky sme vám chceli dať možnosť vybrať si, ako dlho chcete jednotlivých žiakov zamestnať počítaním časti prislúchajúcej počtu percent.

Úloha 8

Takáto všeobecná úvaha je náročná a vhodná najmä pre riešiteľov matematickej olympiády. (Tým nechceme povedať, že by ju nezvládol ktorýkoľvek žiak ZŠ – možno je pre niektorých iba priskoro.) Vymyslite si konkrétnu výšku vreckového, konkrétnu cenu banánov a počítajte. Keď bude mať každý iné číslo, môžete sa venovať zovšeobecňovaniu a na záver ukázať krásu a jednoduchosť riešenia pomocou premennej.

4 Vypĺň tabuľku.

100 %	1 %	15 %	5,5 %	64 %	0,5 %	3,7 %	299 %	142 %	0,25 %	150 %
260	2,6	39	14,3	166,4	1,3	9,62	777,4	369,2	0,65	390
4 000	40	600	220	2 560	20	148	11 960	5 680	10	6 000
370	3,7	55,5	20,35	236,8	1,85	13,69	1 106,3	525,4	0,925	555
6 000	60	900	330	3 840	30	222	17 940	8 520	15	9 000
220	2,2	33	12,1	140,8	1,1	8,14	657,8	312,4	0,55	330

5 Porovnaj znakmi <, >, =.

- a $5 \% \text{ z } 12 = 12 \% \text{ z } 5$ **0,6**
 b $36 \% \text{ zo } 78 = 78 \% \text{ z } 36$ **28,08**
 c $42 \% \text{ zo } 63 = 63 \% \text{ zo } 42$ **26,46**
 d $7 \% \text{ z } 1\,000 = 1\,000 \% \text{ zo } 7$ **70**
 e $25 \% \text{ z } 50 = 50 \% \text{ z } 25$ **12,5**
 f $30 \% \text{ z } 90 = 90 \% \text{ z } 30$ **27**
 g $4 \% \text{ z } 8 = 8 \% \text{ zo } 4$ **0,32**

6 a O koľko je 5 % z 250 menej než 15 % z 90? b O koľko sú 4 % zo 130 viac ako 15 % z 23?

1

1,75

c Kolkokrát viac sú 3 % zo 630 než 4,2 % z 90? d Kolkokrát menej je 80 % z 31,25 než 60 % zo 125?

5

3

7 Vypočítaj:

- a číslo o 5 % väčšie ako 75, **78,75** d číslo o 0,5 % väčšie ako 2, **2,01**
 b číslo o 10 % väčšie ako 50, **55** e číslo o 7 % menšie ako 70, **65,1**
 c číslo o 40 % väčšie ako 150, **210** f číslo o 30 % menšie ako 60, **42**
 g číslo o 77 % menšie ako 230, **52,9**

8 Kedy si môže Jakub kúpiť viac pomarančov? Keď mu rodičia zvýšia vreckové o 20 % alebo keď pomaranče zlacnejú o 20 %?

pomaranče ... x pomaranče ... $0,8x$ vreckové y zvýšené = $1,2y$ vreckové y môže kúpiť ... $\frac{1,2y}{x} = 1,2 \frac{y}{x}$ pomarančovmôže kúpiť ... $\frac{y}{0,8x} = 1,25 \frac{y}{x}$

Výhodnejšie je zlacnenie pomarančov.



Počet percent

1 Vypĺň tabuľku. Ak treba, výsledky zaokrúhli na dve desatinné miesta.

	150	300	4 500	36	14	2,7	35,2	0,16
15	10 %	5 %	0,3 %	41,6 %	107,14 %	555,5 %	42,61 %	9 375 %
5	3,3 %	1,6 %	0,1 %	13,8 %	35,71 %	185,19 %	14,2 %	3 125 %
66	44 %	22 %	1,46 %	183,3 %	471,43 %	2 444,4 %	187,5 %	41 250 %
42	28 %	14 %	0,93 %	116,6 %	300 %	1 555,5 %	119,32 %	26 250 %
4	2,6 %	1,3 %	0,08 %	11,1 %	28,57 %	148,15 %	11,36 %	2 500 %
9	6 %	3 %	0,2 %	25 %	64,29 %	333,3 %	25,57 %	5 625 %
0,8	0,53 %	0,26 %	0,02 %	2,2 %	5,71 %	29,63 %	2,27 %	500 %
0,25	0,16 %	0,08 %	0,01 %	0,69 %	1,79 %	9,26 %	0,71 %	156,25 %
10	6,6 %	3,3 %	0,2 %	27,7 %	71,34 %	370,37 %	28,41 %	6 250 %
1	0,6 %	0,3 %	0,02 %	2,7 %	7,14 %	37,04 %	2,84 %	625 %

2 Vypočítaj, koľko je to percent.

a 4,8 zo 40	12 %	e 55 z 500	11 %	i 31,8 zo 60	53 %
b 3,8 z 19	20 %	f 30 z 15	200 %	j 6 z 30	20 %
c 15,6 zo 60	26 %	g 60 z 20	300 %	k 30 z 20	150 %
d 45 zo 100	45 %	h 2,4 zo 16	15 %	l 0 z 99	0 %

3 Charles Creighton a James Hargis držia svetový rekord v cúvaní. Ich víťazná jazda na aute Ford model A 1929 roadster začala v New York City a skončila v

Los Angeles

30 % z 50 = 15	75 % z 300 = 225	50 % zo 110 = 55
25 % zo 176 = 44	6 % zo 150 = 9	2 % z 500 = 10
40 % z 90 = 36	20 % z 80 = 16	80 % z 25 = 20
10 % zo 130 = 13	5 % z 200 = 10	150 % z 10 = 15

Vyčiarkni výsledky a dozvieš sa odpoveď.



C E H L C O A C S I C A C N G I E T L V E S
2 30 40 190 5 13 80 50 33 25 20 22 50 44 36 10 11 6 60 75 45 77



Úloha 1

Opäť sme vám dali možnosť vybrať si, ako dlho chcete jednotlivých žiakov zamestnať počítaním počtu percent. Periodické výsledky sme nezaokrúhľovali. Pomocou tabuľky si môžete všimnúť pekné závislosti (15 zo 150 je 10 %, 15 z 300 je 5 % a pod.).

Úloha 4

Túto tabuľku sme zaradili, aby si žiaci uvedomili rozdiel medzi zlacnením „o“ a zlacnením „na“. Všimnite si súčet percent v jednom riadku.

Úloha 5

Túto tabuľku sme zaradili, aby si žiaci uvedomili rozdiel medzi zdražením „o“ a zdražením „na“. Všimnite si vzťah medzi percentami v jednom riadku.

Úloha 6

Zatiaľ iba v malom – zhromaždenie štatistických údajov, ich spracovanie do tabuľky a potom do kruhového diagramu.

4 Dané sú ceny pred zlacnením a po zlacnení. Doplň tabuľku.

Tovar	Cena pred zlacnením	Cena po zlacnení	Zlacnenie o n %	Zlacnenie na n %
Kalkulačka	250	200	20 %	80 %
Rádio	1 800	1 500	16,6 %	83,3 %
Hodinky	3 500	3 300	5,74 %	94,26 %
Telefón	2 750	2 000	27,27 %	72,72 %
Televízor	15 990	14 990	6,25 %	93,75 %
Fotoaparát	35 900	35 000	2,51 %	97,49 %

5 Dané sú ceny pred zdražením a po ňom. Doplň tabuľku. Zaokrúhli na dve desatinné miesta.

Tovar	Cena pred zdražením	Cena po zdražení	Zdraženie o n %	Zdraženie na n %
Mlieko	20	25	25 %	125 %
Chlieb	15	18	20 %	120 %
Maslo	30	31	3,3 %	103,3 %
Múka	27	30	11,1 %	111,1 %
Cukor	25	29	16 %	116 %
Olej	59	70	18,64 %	118,64 %

6 Urob štatistiku polročného vysvedčenia vašej triedy v percentách. Znázorni graficky.

	1	2	3	4	5
Slovenský jazyk					
Cudzí jazyk					
Matematika					

7 Napíš, koľko desatinných miest bude mať výsledok.

a $0,263 + 7\,282,15$

3

c $0,742 \cdot 10\,000$

0

7 282,413

7 420

b $26\,306,9 - 5,289\,6$

4

d $508 : 1\,000$

3

26 301,610 4

0,508



Základ

1 Napiš číslo, z ktorého:

a 1 % je 67	6 700	g 32 % je 272	850
b 4 % sú 20	500	h 40 % je 360	900
c 6 % je 9	150	i 5,4 % je 28,62	530
d 5 % je 2	40	j 1,8 % je 4,14	230
e 28 % je 840	3 000	k 10,5 % je 59,85	570
f 75 % je 300	400	l 7,2 % je 403,2	5 600

2 Napiš číslo, ak vieš, že:

a 3 % z neho sú 330	11 000	g 95 % z neho je 11,4	12
b 7 % z neho je 56	800	h 150 % z neho je 30	20
c 2 % z neho sú 90	4 500	i 6,8 % z neho je 149,6	2 200
d 6 % z neho je 33	550	j 0,7 % z neho je 35	5 000
e 25 % z neho je 17	68	k 2,25 % z neho je 9	400
f 13 % z neho je 44,2	340	l 7,2 % z neho je 3,6	50

3 Detektív Baltazár počíta takto:

Ak 20 % guľôčok je 15 guľôčok, tak 100 % vypočítam $15 \cdot 5$, pretože $100 \% : 20 \% = 5$.
Má Baltazár pravdu? Vypočítaj Baltazárovým spôsobom 100 % guľôčok.

a 10 % guľôčok je 44	440	$100 \% : 10 \% = 10; 44 \cdot 10 = 440$
b 50 % guľôčok je 17	34	
c 25 % guľôčok je 39	156	
d 5 % guľôčok je 66	1 320	
e 2 % guľôčok sú 44	2 200	
f 8 % guľôčok je 15	187,5	

4 Tria susedia vysadili 1 % plochy svojho sadu čučoriedkami. Ktorý z nich má najväčší sad, ak pán Hruška vysadil 0,04 ha, pán Slivka 450 m² a pán Malina 3 are?



Hruška ... 0,04 ha = 400 m²

Slivka 450 m²

Malina 3 a = 300 m²

Najväčší sad má pán Slivka.

Úloha 3

Zaujal vašich žiakov tento spôsob počítania? Nám sa zdá pohodlnejší a rýchlejší (okrem toho dobre trénuje priamu úmernosť, čo sa dá využiť pri riešení slovných úloh).

Úloha 4

Pýtajte sa žiakov, či treba počítať celú plochu sadov, alebo stačí porovnať 1 %.

Nechceme, aby ste považovali náš spôsob riešenia jednotlivých úloh za jediný možný.

Úloha 2

Podobné úlohy bývajú „chytákom“ pre žiakov na testoch. Upozorníte ich, aby si všímali zadanie a skutočne odpovedali na otázku.

Úloha 3

Niektoré úlohy na percentá sú pre žiakov problematické nie preto, že nevedia počítat s percentami, ale preto, že si nesprávne určia základ alebo zle priradia časť príslušnému počtu percent. Na tejto úlohe môžete pekne ukázať, ako sa počas riešenia neustále mení základ a porovnať čiastkové zlacnenia s celkovým.

Úloha 4

Ukážeme obidve riešenia – cestu cez konkrétne hodnoty aj výsledné zovšeobecnenie. Záleží na vás, ktorou pôjdete (a najmä na vašich žiakoch).

Slovné úlohy



- 1 Zo 450 žiakov školy 432 chodí do školy pešo. Koľko je to percent?

$$432 : 450 = 0,96$$

Pešo chodí 96 % žiakov.

- 2 Na štadióne bolo 13 000 divákov a z toho 5 850 stálo. Koľko percent divákov sedelo?

$$a) 5\,850 : 13\,000 = 0,45$$

$$b) 13\,000 - 5\,850 = 7\,150$$

$$100 - 45 = 55 \%$$

$$7\,150 : 13\,000 = 0,55$$

Sedelo 55 % divákov.

- 3 Cena kalkulačky sa postupne znižovala. Zo 65 eur na 30 eur, potom na 10 eur a nakoniec na 4 eurá. Koľko percent tvorili jednotlivé zníženia? O koľko percent celkovo bola znížená pôvodná cena?

$$65 \rightarrow 30 \quad \text{na } 46 \%$$

$$30 \rightarrow 10 \quad \text{na } 33 \%$$

$$10 \rightarrow 4 \quad \text{na } 40 \%$$

$$65 \rightarrow 4 \quad \text{na } 6,15 \%, \text{ o } 93,85 \%$$

- 4 O koľko percent drahšie predáva majiteľ knihu, ktorú kúpil v antikvariáte za polovičnú cenu, ak ju predáva za dve tretiny pôvodnej ceny?

$$a) \text{ stála } \dots\dots 120$$

$$b) \text{ stála } \dots\dots x$$

$$\text{kúpil } \dots\dots 60$$

$$\text{kúpil } \dots\dots \frac{x}{2}$$

$$\text{predáva } \dots\dots 80$$

$$\text{predáva } \dots\dots \frac{2}{3}x$$

$$80 : 60 = 1,3$$

$$\frac{2}{3}x : \frac{x}{2} = \frac{4}{3} = 1,3$$

Predáva ju o 33,3 % drahšie ako ju kúpil.



5 Koľko semien z 1 000 vyklíčilo, ak nevyklíčilo 23 %?

$$a) 0,23 \cdot 1\,000 = 230$$

$$b) 100\% - 23\% = 77\%$$

$$1\,000 - 230 = 770$$

$$0,77 \cdot 1\,000 = 770$$

Vyklíčilo 770 semien.

6 Práčka zlacnela o 43,5 eura, čo je 15 % starej ceny. Aká je nová cena práčky?

$$43,5 \dots 15\%$$

$$2,9 \dots 1\%$$

$$290 \dots 100\%$$

$$290 - 43,5 = 246,5$$

Nová cena práčky je 246,5 eura.

7 V kine bolo 560 ľudí. 35 % z nich malo okuliare. Z tohto počtu 25 % tvorili ženy. Koľko mužov v kine malo okuliare?

$$35\% \text{ okuliare} \dots 0,35 \cdot 560 = 196$$

$$25\% \text{ ženy} \dots 0,25 \cdot 196 = 49$$

$$\text{muži} \dots 196 - 49 = 147$$

147 mužov v kine malo okuliare.

8 Pán Šetrný zarobí priemerne 700 eur. Pri zvyšovaní platu mu dali na výber: buď mu dajú polovicu tretiny priemerného platu navyše, alebo mu plat zvýšia o 16 %. Čo si má pán Šetrný vybrať?

$$1. \text{ možnosť} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 700 = 116,6 \text{ eur}$$

$$2. \text{ možnosť} \dots 0,16 \cdot 700 = 112 \text{ eur}$$

Má si vybrať 1. možnosť.



Úloha 7

Opäť jedna z úloh, ktorá nie je matematicky náročná, ale žiaci sa v nej „zamotajú“ a obvykle určia zlé číslo ako výsledok. Učte ich postupne zapisovať postup riešenia a ku každému číslu si napísať, čo znamená.



Úloha 12

Zadanie zvädza súhlasiť s učňom – úhrn úspor, ktoré navrhuje, na prvý pohľad, skutočne dáva 100 %.

9 Koľko eur má nasparených Karol, ak 7 % z jeho úspor je 70 eur?

7 % 70 eur

1 % 10 eur

100 % ... 1 000 eur

Karol ušetril 1 000 eur.

10 Umyvadka riadu stojí po zlacnení 210 eur. Koľko stála pred zlacnením, ak nová cena je 90 % pôvodnej ceny?

90 % 210 eur

1 % $2,3$ eur

100 % ... 233,33 eur

Pred zlacnením stála 233,33 eur.

11 V divadle je 1,5-krát viac žien ako mužov. O koľko percent je v divadle viac žien ako mužov?

Žien = $1,5 \cdot$ mužov

$1,5 M - M = 0,5 M$ rozdiel v počte mužov a žien

Žien je o 50 % viac ako mužov.

12 Učeň prišiel za svojim majstrom so zlepšovacím návrhom: „Ak lepšou organizáciou práce znížime tento rok naše náklady o 45 %, na budúci rok o 30 % a na ďalší rok o 25 %, potom nás už výroba nebude stáť vôbec nič.“ Dostal učeň od majstra odmenu? Má pravdu? Vysvetli.



Náklady 1 000 eur

1. rok – 45 % 550 eur nové náklady ($0,55 \cdot 1\,000$)

2. rok – 30 % 385 eur ($0,7 \cdot 555$)

3. rok – 25 % 288,75 eur ($0,75 \cdot 385$)

$288,75 : 1\,000 = 0,288\,75$

Nemá pravdu. Náklady sa znížia na 28,875 %.

- 13** Ktorým číslom v tvare zlomku treba vynásobiť číslo 40, aby sme dostali o 6 % menšie číslo?

$$x \cdot 40 = 0,94 \cdot 40$$

$$x = \frac{94}{100} = \frac{47}{50}$$

Číslo 40 musíme vynásobiť zlomkom $\frac{47}{50}$.

- 14** Na otvárací ples sezóny si kúpila manželka prezidenta náhrdelník s náramkom za 768 eur. Koľko stál náhrdelník a koľko náramok, ak bol náramok o 40 % **a)** lacnejší, **b)** drahší ako náhrdelník?

a) náhrdelník x 480

náramok $0,6x$ $\frac{288}{768}$

$$1,6x = 768$$

$$x = 480$$

b) náhrdelník x 320

náramok $1,4x$ $\frac{448}{768}$

$$2,4x = 768$$

$$x = 320$$

- 15** Obchodník predáva jablká so ziskom 20 % za kilogram. Dnes sa rozhodol, že zníži cenu jablák o 10 %. S akým ziskom predáva obchodník jablká dnes?

1 kg
100 centov



a) zisk 20 % ... kúpi za 100, predá za 120

cena o 10 % dolu ... $0,9 \cdot 120 = 108$

$108 : 100 = 1,08$... zisk 8 %

b) zisk 20 % ... kúpi za x , predá za $1,2x$

cena o 10 % dolu ... $0,9 \cdot 1,2x = 1,08x$... zisk 8 %

- 16** Televízor stál 1 000 eur. Počas posledných troch mesiacov najskôr cenu televízora znížili o 30 %, potom ju znovu znížili o 20 % a nakoniec cenu zvýšili o 50 %. Bola posledná cena rovnaká ako pôvodná cena? Ak nie, koľko % bol medzi nimi rozdiel?

Cena 1 000 eur

zníženie o 30 % ... cena 700 eur

zníženie o 20 % ... cena 560 eur

zvýšenie o 50 % ... cena 840 eur

Výsledná cena bola o 16 % nižšia ako pôvodná.

Úloha 16

Dajte žiakom úlohu, aby zistili, o koľko percent by museli zvýšiť cenu, aby bola taká ako na začiatku.



Úloha 19

Závisí výsledok úlohy od výšky dane, ktorá bola pred rozhodnutím parlamentu? (Myslíme si, že pre siedmakov je zjednodušený „výlet“ do sveta miezd a daní užitočný.)

Úloha 20

Najjednoduchšia cesta vedie cez rozklad na súčin prvočísel. Ak ju žiaci neobjavia hneď, nevaď. Nechajte ich skúšať a násobiť, počítať percentá.

- 17** Prvé číslo je 60. Druhé je 80 % prvého a tretie je 50 % súčtu prvého a druhého čísla. Vypočítaj aritmetický priemer týchto troch čísel.

Prvé 60

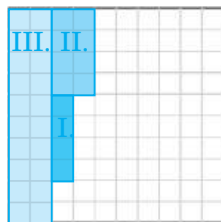
druhé $0,8 \cdot 60 = 48$

tretie $0,5 \cdot (60 + 48) = 54$

$(60 + 48 + 54) : 3 = 54$

Aritmetický priemer čísel je 54.

- 18** Prvé číslo tvorí 50 % druhého, druhé číslo tvorí 40 % tretieho a tretie číslo tvorí 20 % štvrtého. Súčet čísel je 396. Ktoré sú to čísla?



Štvrté 100 štvorčekov 300

tretie 20 štvorčekov 60

druhé 8 štvorčekov 24

prvé 4 štvorčekov 12

spolu 132 štvorčekov 396 1 štvorček = 3

- 19** V parlamente pri schvaľovaní rozpočtu poslanci podali dva návrhy: podľa prvého by sa platy aj dane zvýšili o 10 %, a podľa druhého by sa platy aj dane zvýšili o 15 %. Ktorý z návrhov je výhodnejší pre zamestnancov, ak predtým bola daň 20 %?



Bolo: plat p daň $0,2p$ dostal $0,8p$

prvý: plat $1,1p$ daň $0,3 \cdot 1,1p = 0,33p$ dostal $0,77p$

druhý: plat $1,15p$ daň $0,35 \cdot 1,15p = 0,4025p$ dostal $0,7475p$

Výhodnejší je prvý.

- 20** Číslo 135 sa dá rozložiť na súčin dvoch činiteľov tak, že jeden bude o 3 väčší ako 40 % druhého. Ktoré sú to činitele?



$135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 9 \cdot 15$

$0,4 \cdot 15 = 6$

$6 + 3 = 9$

Sú to 9 a 15.



- 21** Na prijímacie pohovory sa prihlásilo 2 600 žiakov, čo bolo 130 % plánovaného počtu. Koľko prihlášok bolo plánovaných?

$$130 \% \dots\dots 2\,600$$

$$1 \% \dots\dots\dots 2\,600 : 130 = 20$$

$$100 \% \dots\dots 20 \cdot 100 = 2\,000$$

Plánovaných bolo 2 000 prihlášok.

- 22** Cena elektrickej rúry bola znížená o 40 % na 300 eur. O koľko eur znížili cenu rúry?

$$60 \% \dots\dots 300 \text{ eur}$$

$$1 \% \dots\dots\dots 5 \text{ eur}$$

$$40 \% \dots\dots 200 \text{ eur}$$

Cenu znížili o 200 eur.

- 23** Počet vyklíčených rastlín stúpol od rána do večera o 50 % na 300. Koľko rastlín bolo vyklíčených ráno?

$$150 \% \dots\dots 300 \dots\dots \text{večer}$$

$$1 \% \dots\dots\dots 300 : 150 = 2$$

$$100 \% \dots\dots 2 \cdot 100 = 200 \dots\dots \text{ráno}$$

Ráno bolo vyklíčených 200 rastlín.

- 24** Cena auta najprv o 30 % stúpala a potom o 30 % klesla. Je teraz auto lacnejšie ako predtým alebo je drahšie, alebo stojí rovnako? Ako to bude v situácii, keď auto najprv o 30 % zlacnie a potom o 30 % zdražie?

$$\text{a) } + 30 \% \rightarrow 1,3x$$

$$- 30 \% \rightarrow 0,7 \cdot 1,3x = 0,91x \rightarrow \text{o } 9 \% \text{ lacnejšie}$$

$$\text{b) } - 30 \% \rightarrow 0,7x$$

$$+ 30 \% \rightarrow 1,3 \cdot 0,7x = 0,91x \rightarrow \text{o } 9 \% \text{ lacnejšie}$$



Úloha 26

Úloha je náročná najmä tým, že najpohodlnejšie sa rieši pomocou sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Nie je však problém zostaviť iba jednu rovnicu s jednou neznámou (dosadzovacia metóda). Ak sa vám úloha zdá pre vašich žiakov ešte náročná, pokojne ju preskočte.

Úloha 28

Pripomeňte si so žiakmi, čo to znamená, že priemerná výška skupiny je 164,75 cm (keby boli všetci štyria členovia skupiny rovnako vysokí, merali by každý 164,75 cm).



- 25** Peter a Pavol si kúpili autá. Petrovo bolo o 25 % drahšie ako Pavlovo. O koľko percent bolo Pavlovo auto lacnejšie ako Petrovo?

Pavol x

Peter $1,25x = p$

$$x = 0,8p$$

Pavlovo auto je o 20 % lacnejšie ako Petrovo.

- 26** Obchodník kúpil 5 telefónnych ústrední a 10 faxov za 8 500 eur. Za koľko ich predal, ak predajná cena bola o 30 % vyššia ako nákupná cena?

100 % 8 500

1 % 85

130 % 11 050

Predal ich za 11 050 eur.

- 27** Jesennej parlamentnej schôdze sa zúčastnili 4/5 poslancov. Za navrhnutý program hlasovalo 80 % prítomných. Podľa pravidiel môže byť program schválený iba vtedy, ak zaň hlasuje najmenej 60 % všetkých poslancov. Bol navrhnutý program jesennej parlamentnej schôdze schválený alebo nie?

Parlament x

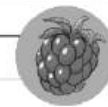
prítomných $\frac{4}{5}x = 0,8x$

za 80 % z $0,8x = 0,8 \cdot 0,8x = 0,64x$

schválený pri ... 60 % z $x = 0,6x$

$$0,64x > 0,6x$$

Program bol schválený.



- 28** Vypočítaj priemernú výšku každej skupiny žiakov.

a Marek 175 cm, Mária 164 cm, Miro 162 cm, Mirka 158 cm

164,75 cm

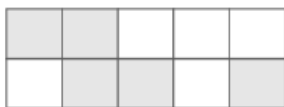
b Karol 183 cm, Kaja 168 cm, Kristián 172 cm, Kristína 151 cm

168,5 cm



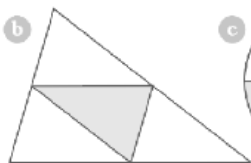
29 Koľko percent z plochy útvaru zaberá vyfarbená časť?

a



50 %

b



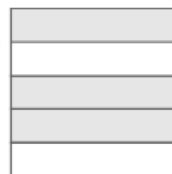
25 %

c



75 %

d



60 %

30 Ak zväčšíš stranu štvorca o 25 %, o koľko percent sa zväčší jeho obvod a obsah?

Pôvodný a

$$o = 4a$$

$$S = a^2$$

nový $a' = 1,25a$

$$o' = 4 \cdot 1,25a = 1,25 \cdot 4a = 1,25o$$

..... o 25 % väčší

$$S' = 1,25a \cdot 1,25a = 1,5625a^2$$

..... o 56,25 % väčší

31 Jedna strana obdĺžnika má dĺžku 45 % dĺžky jeho druhej strany.
Aké sú rozmery obdĺžnika, ak jeho obvod je 101,5 cm?

$$a = 0,45b$$

$$o = 2(a + b)$$

$$101,5 = 2(0,45b + b)$$

$$b = 35 \text{ cm}$$

$$a = 15,75 \text{ cm}$$

Rozmery obdĺžnika sú 15,75 cm a 35 cm.

Úloha 29

Najlepšie sa rieši táto úloha cez zlomky. Vyfarbená časť je jedna štvrtina útvaru, to znamená, že to bude 25% (lebo štvrtina zo 100% je 25%).

O krom otázky „o kolko percent?“ sa môžete v každej úlohe pýtať „na kolko percent?“.

- 32** Jednu hranu kvádra s rozmermi 2 cm, 4 cm a 6 cm zmenšíme o 20 %. Ako sa zmení objem kvádra? O kolko percent?

Pôvodný $V = a \cdot b \cdot c$

nový $V' = 0,8 \cdot a \cdot b \cdot c = 0,8V$

Ojem sa zmenší o 20 %.

- 33** Kváder má rozmery 10 cm, 20 cm a 50 cm. Jednu hranu kvádra zmenšíme o 20 % a druhú o 20 % zväčšíme. Ako sa zmení objem kvádra? O kolko percent?

Pôvodný $V = 10 \cdot 20 \cdot 50 = 10\,000\text{ cm}^3$

nový $V = 8 \cdot 24 \cdot 50 = 9\,600\text{ cm}^3$

10 000 100 %

100 1 %

9 600 96 %

- 34** Kváder má rozmery 3 dm, 6 dm a 8 dm. Jednu hranu kvádra zmenšíme o 20 % a druhú o 30 % zväčšíme. Ako sa zmení objem kvádra? O kolko percent?

Pôvodný $V = 3 \cdot 6 \cdot 8 = 144\text{ dm}^3$

nový $V = 2,4 \cdot 7,8 \cdot 8 = 149,76\text{ dm}^3$

144 100 %

1,44 1 %

149,76 104 %

- 35** Kváder má rozmery 50 cm, 8 dm a 0,9 m. Jednu hranu kvádra zmenšíme o 20 %, druhú o 30 % zväčšíme a tretiu skrátime na polovicu. Ako sa zmení objem kvádra? O kolko percent?

50 cm = 5 dm

0,9 m = 9 dm

Pôvodný $V = 5 \cdot 8 \cdot 9 = 360\text{ dm}^3$

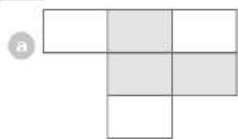
nový $V = 4 \cdot 4 \cdot 11,7 = 187,2\text{ dm}^3$

360 100 %

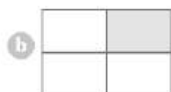
3,6 1 %

187,2 52 %

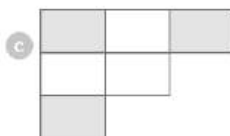
36 Koľko percent z plochy útvaru zaberá vyfarbená časť?



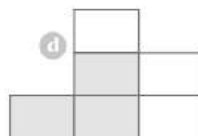
50 %



25 %

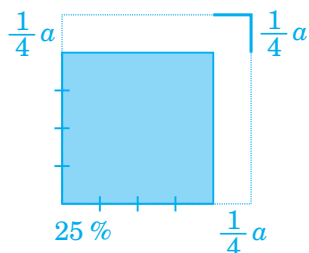


50 %



50 %

37 Ak zväčšíš stranu štvorca o 25 %, zväčší sa jeho obvod o 12 cm. Aká bola dĺžka strany pôvodného štvorca?



12 cm bola dĺžka pôvodnej strany štvorca.

38 Jednu stranu obdĺžnika zväčšíš o 25 %, druhú zmenšíš o 20 % a obsah obdĺžnika sa nezmení. Je to možné?

Pôvodný a, b

Zmenený $a' = 1,25 a$

$S = ab$

$b' = 0,8 b$

$S' = 1,25a \cdot 0,8b = ab = S$



Zvoľ si vhodné rozmery obdĺžnika!

Je to možné.

39 Šírka obdĺžnika tvorí 65 % dĺžky. Vypočítaj dĺžky strán obdĺžnika, ak jeho obvod je 132 dm.

$b = 0,65a$

$o = 2(a + b)$

$132 = 2(a + 0,65a)$

$a = 40 \text{ dm}$

$b = 26 \text{ dm}$

Úloha 37

Žiaci už vyriešili viacero úloh tohto typu, preto si myslíme, že by mohli skúsiť hneď riešenie s premennou. Ak to nejde, nevadí, vráťte sa opäť ku konkrétnym číslam a k zovšeobecneniu.

Úloha 38

Zaskočte žiakov otázkou, či je to vždy možné. Či nevedia najšť obdĺžnik, pre ktorý tento výsledok neplatí.



Úrokovanie – jedna z mála vecí z hodín matematiky, o ktorých môžeme žiakom s čistým svedomím povedať, že ju budú potrebovať vo svojom živote.

V tejto chvíli sa zameriavame na jednoduché príklady, aby žiaci mali možnosť pochopiť „fungovanie“ úrokovania. Veľké množstvo ďalších (jednoduchých i náročnejších) úloh nájdete v pracovných zošitoch autorov Bero – Berová **Praktické financie** z dielne vydavateľstva Orbis Pictus Istropolitana.

Jednoduché úrokovanie

1 Vypočítaj úrok pre danú istinu a úrokovú mieru po jednom roku úročenia.

Istina (€)	10 000	5 000	24 000	100 000	8 300	900	50 000
Úroková miera p. a. (%)	5	2	6	3	4	10	7
Úrok (€)	500	100	1 440	3 000	332	90	3 500

p. a. označuje dobu, za ktorú istina vzrastie o dohodnutý úrok

p. a.
per annum – za 1 rok



2 Pani Danka si uložila na ročný termínovaný vklad 10 000 eur pri úrokovej miere 2 % p. a. z vloženého vkladu. Koľko eur bude mať pani Danka po roku?

Vklad 10 000 eur

úrok 200 eur

spolu 10 200 eur

Pani Danka bude mať po roku 10 200 eur.

3 Aký veľký úrok musí zaplatiť pán Karol po roku, ak si požičal 5 000 eur pri úrokovej miere 3,5 % p. a.?

Istina 5 000 eur

úrok 175 eur

Pán Karol musí zaplatiť 175 eur.

4 Živnostník si vzal na začatie podnikania podnikateľský úver 15 000 eur pri úrokovej miere 7,5 % p. a. Štátna dotácia pre začínajúcich podnikateľov je 800 eur ročne počas 3 rokov a môže byť použitá aj na splácanie úveru. Aký veľký úrok zaplatí podnikateľ po prvom roku podnikania?

Úver 15 000 eur

úrok 1 125 eur

dotácia 800 eur

rozdiel 325 eur

Po prvom roku podnikania zaplatí 325 eur.



5 Vypočítaj výšku úrokovej miery pre danú istinu a úrok po roku úročenia.

Istina (€)	2 000	40 000	300 000	800	7 500	52 000	6 300
Úroková miera p. a. (%)	5 %	3 %	1 %	10 %	8 %	2 %	4 %
Úrok (€)	100	1 200	3 000	80	600	1 040	252

Istina je názov pre tú sumu, ktorú do banky vložíš alebo ei ju z banky požičiáš.



6 Pani Betka si vzala pôžičku vo výške 8 300 eur. Po roku zaplatila úrok 415 eur. Aká je úroková miera pôžičky pani Betky?

Pôžička 8 300 eur

úrok 415 eur

úroková miera 5 %

Pani Betka má úrokovú mieru 5 % p.a.

7 Pán Adam a pán Milan si vložili každý do svojej banky 20 000 eur na ročný termínovaný vklad. Po prvom roku pribudlo pánovi Adamovi 600 eur a pánovi Milanovi 550 eur. Akú úrokovú mieru mala každá banka?

Pán Adam

Pán Milan

vklad 20 000 eur

vklad 20 000 eur

úrok 600 eur

úrok 550 eur

úroková miera 3 %

úroková miera 2,75 %

8 Pani Katka si chce požičať 2 000 eur. Spoločnosť SMETUPREVAS jej ich požičia za desať splátok po 240 eur a prvé dva mesiace nemusí platiť nič. Spoločnosť RYCHLEPENIAZE jej ich požičia za 12 splátok po 210 eur. Ktorá spoločnosť má výhodnejšiu úrokovú mieru pre pani Katku?

Pôžička 2 000 eur

Smetuprevas $10 \cdot 240 = 2\,400$ eur úrok 400 eur

úroková miera 20 %

Rychlepeniaze $12 \cdot 210 = 2\,520$ eur úrok 520 eur

úroková miera 26 %

Výhodnejšiu úrokovú mieru má spol. Smetuprevas.

Úloha 8

Táto úloha v zjednodušenej forme opisuje rozhodovanie, v ktorom sa ocitá čoraz viac našich spoluobčanov – chcú si požičať peniaze a rozhodujú sa iba na základe výšky splátok. Upozorňujte žiakov na to, že spoločnosti v reklamách a ponukách využívajú túto „fintu“, pretože sa ňou veľmi dobre lákajú klienti, ktorí si v skutočnosti neuvedomujú, koľko ich bude pôžička stáť. Hľadajte so žiakmi reálne ponuky bánk a spoločností a porovnávajte ich. Diskutujte so žiakmi o tom, či je rozumné si požičovať, kedy je rozumné si požičovať a na čo všetko treba pri pôžičke myslieť. Rozprávajte sa o reklamných sloganoch spoločností, ktoré nás presvedčujú, že výhodnejšie je si požičať ako našetriť a že veci zostarnú skôr, ako si na ne našetríme. Táto téma poskytuje množstvo výchovných momentov, ďalšie tipy a námety nájdete v pracovných zošitoch *Praktické financie*.

9 Výpočítaj istinu pre danú úrokovú mieru a úrok po jednom roku úročenia.

Istina (€)	20 000	6 250	700 000	7 600	1 300	18 100	5 166,66
Úroková miera p. a. (%)	2	4	1	5	7	3	6
Úrok (€)	400	250	7 000	380	91	543	310

10 Aký veľký úver na bývanie si vzala rodina Nováková, ak po prvom roku zaplatili úrok 5 500 eur a úroková miera tohto úveru bola 5,5 % p. a. ?

Úrok 5 500 eur úroková miera 5,5 % p.a.

úver 100 000 eur

Novákovci si vzali úver 100 000 eur.

11 Po roku pribudlo pani Eve na vkladnú knižku 54 eur. Úroková miera jej vkladnej knižky je 1,25 % p. a. Koľko eur mala pani Eva na vkladnej knižke pred rokom?

Úrok 54 eur úroková miera 1,25 % p.a.

vklad 4 320 eur

Pred rokom mala pani Eva 4 320 eur.

12 Pán Jakub si po roku vybral zhodnotenie svojho vkladu vo výške 2 500 eur. Aký veľký bol jeho vklad, ak je jeho úroková miera 2,5 % p. a.?

Úrok 2 500 eur úroková miera 2,5 % p.a.

vklad 100 000 eur

Pán Jakub si vložil 100 000 eur.

- 13** Pán Šetrný vložil do banky 15 000 eur na vklad s úrokovou mierou 3 % p. a. Má dve možnosti. Vždy po roku si môže úroky vybrať alebo ich nechať v banke a tá mu ich bude ďalej zhodnocovať. Urob pre pána Šetrného prehľad stavu jeho financií v banke v priebehu 10 rokov.

a úroky si vyberá

Rok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Istina (€)	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000	15 000
Úrok (€)	450	450	450	450	450	450	450	450	450	450

Postupne si vyberá $9 \cdot 450 = 4\,050$ eur
 po desiatich rokoch má na účte 15 450 eur } spolu 19 500 eur.

b úroky zhodnocuje

Rok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Istina (€)	15 000	15 450	15 913,50	16 390,91	16 882,64	17 389,12	17 910,79	18 448,11	19 001,45	19 571,60
Úrok (€)	450	463,50	477,41	491,73	506,48	521,67	537,32	553,44	570,05	587,15

Po desiatich rokoch má na účte 20 158,75 eur.

- 14** Banka poskytuje pôžičky s úrokovou mierou 5 % p. a. Aký veľký úrok zaplatíš, ak si požičiaš 5 000 eur na:

- a 1 rok, 250 eur
 b $\frac{1}{2}$ roka, 125 eur
 c $\frac{1}{4}$ roka, 62,5 eur
 d 5 rokov? 1 250 eur

- 15** Banka má na vklady úrokovú mieru 3 % p. a. Aký veľký úrok získaš, ak vložíš do banky 10 000 eur na:

- a 1 rok, 300 eur
 b $\frac{1}{2}$ roka, 150 eur
 c $\frac{1}{4}$ roka, 75 eur
 d 5 rokov? 1 500 eur

Úloha 13

Cieľom tejto úlohy je porovnať výhodnosť oboch spôsobov šetrenia. Pri druhom spôsobe, keďže navyšujeme každý rok istinu, zvyšuje sa nám aj úrok. Preto je tento spôsob výhodnejší, ak chceme, aby naše peniaze „zarabali“ ďalšie peniaze. Diskutujte so žiakmi o tom, či je pre nás dobré mať „zarabajúce“ peniaze. Čo ešte okrem peňazí môžeme vlastniť a bude nám to zarábať peniaze? Napríklad, ak vlastníme nehnuteľnosť a dávame ju do prenájmu... Ďalšie tipy a námety nájdete v pracovných zošitoch *Praktické financie*.

Úloha 14 Úloha 15

Úloha upozorňuje na to, že okrem úrokovej miery je potrebné si všimnúť aj obdobie, počas ktorého máme uložené peniaze alebo si požičiavame peniaze. Pretože aj tento faktor ovplyvňuje výšku nášho úroku za dané obdobie.

Úloha 16

Pozornosť žiakov treba zamerať na frekvenciu pripisovania úrokov. Pán Šetný si na začiatku roka vloží istú sumu (napr. 1 000 eur), ale výška jeho konta po roku závisí od toho, ako často mu budú pripisované úroky. Ak budete mať čas a chuť, môžete sa „hrať“ na týždenné, denné či iné úročenie.

Úloha 17

Hypotekárny úver sa v tomto prípade spláca tak, že pán Staviteľ platí mesačne rovnako veľkú splátku 100 000. Časť z nej tvorí úrok z dlžnej sumy a zvyšok je splátka istiny. Ako sa znižuje dlžná suma, znižuje sa aj splátka úroku, ktorú pán Staviteľ mesačne platí, a zvyšuje sa splátka istiny. Pre zaujímavosť si môžete vypočítať zisk banky na tomto hypotekárnom úvere (a to sme ešte nezaráтали poplatky za poskytnutie úveru). Ďalší problém, ktorý žiaci môžu riešiť, je, či by pán Staviteľ zaplatil banke viac, keby splácal svoju hypotéku dlhšie (platil by mesačne menšie splátky).

16 Pán Šetný si chce uložiť na termínovaný vklad peniaze. V banke mu ponúkajú rôzne termínované vklady s rôznym úročením. Pomôž vybrať pánovi Šetnému najvýhodnejší:

- A – termínovaný vklad s pripísaním úrokov 12 % raz ročne,
- B – termínovaný vklad s pripísaním úrokov 6 % raz za pol roka,
- C – termínovaný vklad s pripísaním úrokov 3 % raz za štvrtrok,
- D – termínovaný vklad s pripísaním úrokov 2 % raz za 2 mesiace,
- E – termínovaný vklad s pripísaním úrokov 1 % raz za mesiac.

Vklad = 1 000 eur

A = 1 120 eur

B = 1 123,60 eur

C = 1 125,51 eur

D = 1 126,16 eur

E = 1 126,80 eur



17 Pán Staviteľ si v roku 2002 vybavoval hypotekárny úver na stavbu domu. V tom čase najvýhodnejší úver ponúkala B-banka, a to s ročnou úrokovou sadzbou 12 %. Doplň splátkový kalendár, ktorý vypracovala banka pánovi Staviteľovi.

Mesiac	Dlžná suma	Z pevnej splátky 100 000 korún	
		úrok	splátka istiny
Január	1 200 000,00	12 000,00	88 000,00
Február	1 112 000,00	11 120,00	88 880,00
Marec	1 023 120,00	10 231,20	89 768,80
Apríl	933 351,20	9 333,50	90 666,50
Máj	842 684,70	8 426,80	91 573,20
Jún	751 111,50	7 511,10	92 488,90
Júl	658 622,60	6 586,20	93 413,80
August	565 208,80	5 652,10	94 347,90
September	470 860,90	4 708,60	95 291,40
Október	375 569,50	3 755,70	96 244,30
November	279 325,20	2 793,30	97 206,70
December	182 118,50	1 821,20	98 178,80
	83 939,70	839,40	83 939,70

1 200 000

18 Spoločnosť TRITRO ponúka nákup na splátky.

Pani Katka a pani Mária si kúpili chladničku za 500 eur a dohodli sa so spoločnosťou takto:

Pani Katka zaplatí pri podpise zmluvy 10 % ceny chladničky a potom 10 splátok vo výške 55,17 eura.

Pani Mária nezaplatí pri podpise zmluvy nič a potom 10 splátok vo výške 61,40 eura.

a Ktorá pôžička je výhodnejšia?

Katka podpis: 50 eur $10 \cdot 55,17 = 551,70$ **spolu 601,70 eur**

Mária podpis: 0 eur $10 \cdot 61,40 = 614,00$ **spolu 614,00 eur**

Výhodnejšia je Katkina pôžička.

b Kto zaplatí za chladničku viac, pani Katka alebo pani Mária?

Viac zaplatí pani Mária (o 12,30 eur).

c O koľko percent preplatili svoje chladničky?

Katka 601,70 o 20,34 %

Mária 614,00 o 22,8 %

19 Keď si kúpiš auto na lízing, môžeš ho používať, aj keď ešte nie je zaplatené. V spolupráci so spoločnosťou

ABCLIZING si môžeš kúpiť auto za 15 000 eur. Ponúkajú ti dve možnosti financovania:

A – prvá splátka vo výške 20 % ceny auta a potom 36 splátok vo výške 399,47 eura.

B – prvá splátka vo výške 20 % ceny auta a potom 48 splátok vo výške 308,27 eura.

Ktorý spôsob si vyberieš?

A prvá splátka 3 000 eur

$36 \cdot 399,47 = 14\,380,92$ eur

spolu 17 380,92 eur

B prvá splátka 3 000 eur

$48 \cdot 308,27 = 14\,796,96$ eur

spolu 17 796,96 eur

Prvý spôsob je výhodnejší.

Úloha 18

Učte žiakov, že keď už sa dostanú do situácie, že si potrebujú požičať, je potrebné si všetko dobre prepočítať. Neorientovať sa iba podľa výšky splátok, ale aj podľa úrokovovej miery a hlavne podľa čísla r.p.m.n. (ročná priemerná miera navýšenia). Toto je údaj, ktorý v skutočnosti prezrádza, koľko klient zaplatí za pôžičku a každý, kto požičiava, je povinný uvádzať ho (aj v reklame, aj v zmluve). Upozorňujte žiakov, že v našej spoločnosti je (žiaľ!) zvykom, že najdôležitejšie veci sú často v zmluve napísané tým najmenším písmom a že je potrebné zmluvu si poriadne prečítať a keď jej úplne nerozumiem, poradiť sa s niekým kvalifikovaným. Hovorte so žiakmi o tom, čo sa stane dlžníkom, ktorý nesplácajú svoje dlhy.

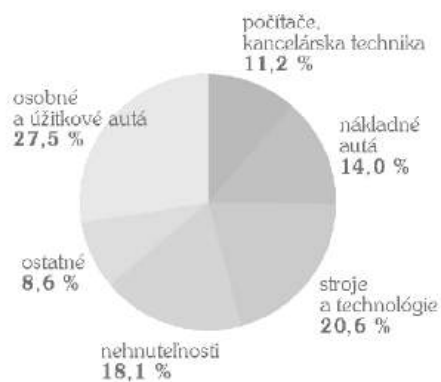
Úloha 19

V zásade platí – čím dlhšie splácam, tým viac sa požičanie zaplatím. Aj preto je prvý spôsob výhodnejší, aj keď podľa výšky splátok sa to nezdá. Ďalší dôležitý faktor je, že pri väčšine lízingových zmlúv sa stanete vlastníkom splácaného auta až po jeho úplnom zaplatení (tu môžu nastať problémy napríklad vtedy, ak vám auto ukradnú a poisťovňa v tom prípade plní škodu lízingovej spoločnosti a nie vám – hoci ste už veľa peňazí za auto zaplatili, nemáte ani auto, ani peniaze). Ďalšie tipy a námety nájdete v pracovných zošitoch *Praktické financie*.



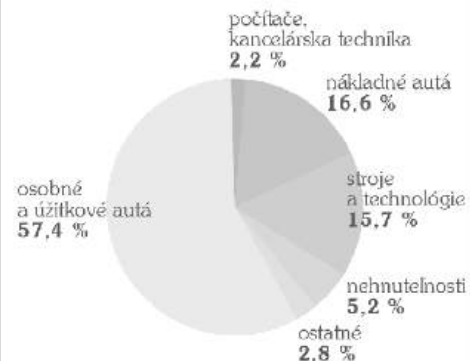
- 1** Kruhové diagramy ukazujú štruktúru rozloženia lízingu v Európe a na Slovensku v roku 2001. Porovnaj.

ŠTRUKTÚRA LÍZINGU V EURÓPE (2001)



Prameň: Leaseurope

ŠTRUKTÚRA LÍZINGU V SR (2001)



Prameň: Asociácia leasingových spoločností SR

- 2** Vyplň tabuľku o výskyte jednotlivých znáмок na vašich polročných vysvedčeníach a narysuj k nej stĺpcový aj kruhový diagram.

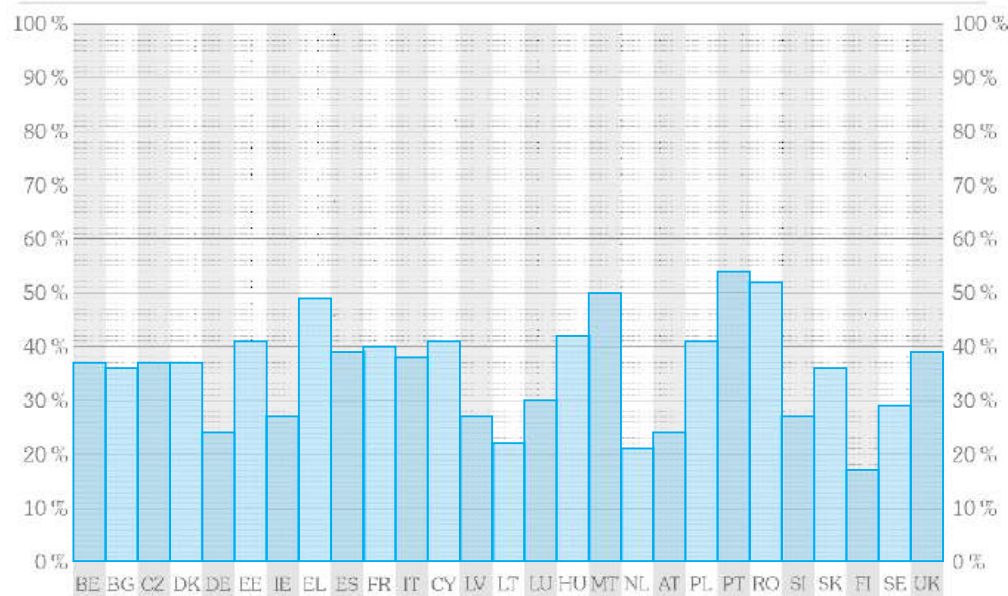
	Výborný	Chválitebný	Dobry	Dostatočný	Nedostatočný
Počet					
Percentuálne zastúpenie					



3 V tabuľke sú spracované výsledky prieskumu Eurobarometra z roku 2006 o tom, koľko ľudí v európskych krajinách sa nevenuje pravidelnému cvičeniu.

Belgicko (BE)	37 %	Francúzsko (FR)	40 %	Rakúsko (AT)	24 %
Bulharsko (BG)	36 %	Taliancko (IT)	38 %	Poľsko (PL)	41 %
Česká republika (CZ)	37 %	Cyprus (CY)	41 %	Portugalsko (PT)	54 %
Dánsko (DK)	37 %	Lotyšsko (LV)	27 %	Rumunsko (RO)	52 %
Nemecko (DE)	24 %	Litva (LT)	22 %	Slovinsko (SI)	27 %
Estónsko (EE)	41 %	Luxembursko (LU)	30 %	Slovensko (SK)	36 %
Írsko (IE)	27 %	Maďarsko (HU)	42 %	Fínsko (FI)	17 %
Grécko (EL)	49 %	Malta (MT)	50 %	Švédsko (SE)	29 %
Španielsko (ES)	39 %	Holandsko (NL)	21 %	Spojené kráľovstvo (UK)	39 %

a Spracuj údaje stĺpcovým diagramom.



b V ktorej krajine pravidelne športuje najmenej ľudí?

Portugalsko

c V ktorej krajine pravidelne športuje najviac ľudí?

Fínsko

d Ako sú na tom Slováci?

15 krajín menej ako SK; 10 krajín viac ako SK

e Urobte prieskum svojho okolia (pýtajte sa detí, študentov, mužov, žien, dôchodcov...

a údaje spracujte spoločne za celú triedu). Porovnajte s výsledkami prieskumu Eurobarometra.

Úloha 3

Pozor – tabuľka hovorí o ľuďoch, ktorí sa pravidelne nevenujú športu a v úlohách sa pýtame na ľudí, ktorí športujú. Dá sa, samozrejme, vymyslieť oveľa viac otázok, na ktoré nájdete odpoveď pomocou vypracovaného stĺpcového diagramu. My vieme, že vy to zvládnete hravo a práve preto nechajte úlohy vymýšľať vašich žiakov. Kto vymyslí najviac otázok (zmysluplných), kto vymyslí najzábavnejšiu, najkomplikovanejšiu...

Námet úlohy môžete využiť na diskusiu o tom, koľko žiakov vo vašej triede pravidelne športuje, čo to znamená pravidelne športovať, aký význam má pre naše zdravie pravidelné športovanie...



Úloha 4

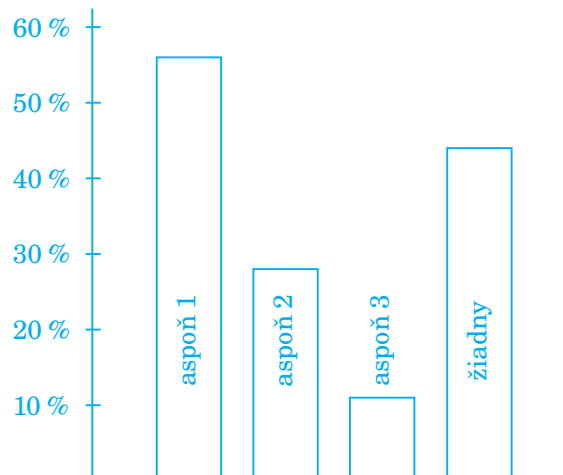
Kruhový diagram je výhodný vtedy, ak delíme jednu skupinu (100%) na niekoľko častí – napríklad rozdelenie jazykových znalostí žiakov jednej triedy.

- 4** V tabuľke sú výsledky prieskumu jazykových znalostí obyvateľov Európy. (Podľa Eurobarometra, rok 2005.)

Okrem materinského jazyka ovláda	
aspoň jeden cudzí jazyk	56 %
aspoň dva cudzie jazyky	28 %
aspoň tri cudzie jazyky	11 %
žiadny cudzí jazyk	44 %

- a** Dajú sa tieto údaje spracovať kruhovým alebo stĺpcovým diagramom? Vyber si a urob diagram.

Výhodnejší je stĺpcový diagram.



- b** Urobte prieskum vo svojom okolí a porovnajte jeho výsledky s výsledkami z Eurobarometra. Rozdeľte respondentov do skupín podľa rôznych kritérií.

Respondent.
je človek, ktorý odpove-
dá na otázky položené
v prieskume.



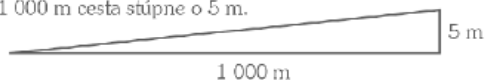
Promile

1 Doplň. Jedno promile je jedna tisícina.
Celok tvorí 1 000 ‰.

2 Vypočítaj.

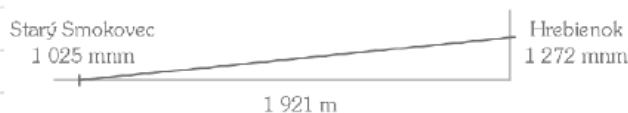
- | | | | |
|-------------------|-------|-------------------|-------|
| a) 14 ‰ z 1 500 | 21 | e) 8 ‰ z 8 | 0,064 |
| b) 200 ‰ z 18 000 | 3 600 | f) 35 ‰ zo 100 | 3,5 |
| c) 95 ‰ z 2 000 | 190 | g) 3,06 ‰ z 5 000 | 15,3 |
| d) 54 ‰ z 10 000 | 540 | h) 2,9 ‰ z 20 700 | 60,03 |

3 V promile vyjadrujeme stúpanie alebo klesanie cesty, železničnej trate, lanovky.
Stúpanie 5 ‰ znamená, že pri vodorovnej vzdialenosti 1 000 m cesta stúpane o 5 m.
Vypočítaj stúpanie/klesanie ciest na obrázku.



a 2 000 m 3,5 m 1 000 m 1,75 m	b 3 750 m 10 m 1 000 m 2,6 m
c 8 000 m 8 m 1 000 m 1 m	d 4 500 m 2 m 1 000 m 0,4 m

4 Spodná stanica lanovky v Starom Smokovci leží v nadmorskej výške 1 025 m, horná stanica na Hrebienku v nadmorskej výške 1 272 m. Vypočítaj stúpanie lanovky, ak vodorovná vzdialenosť staníc je 1 921 m.



1 921 m 247 m

1 000 m 128,58 m

Stúpanie lanovky je 128,58 ‰.

Úloha 2

Princíp počítania je ten istý ako pri percentách, len sa nachádzame na „území tisícín“.

Úloha 3

My sme sa pri riešení úlohy držali logiky definície stúpania/klesania. Vždy sme si vypočítali, o koľko metrov cesta stúpane/klesne pri vodorovnej vzdialenosti 1 000 m.

Úloha 5

Vypočítať, koľko promile alkoholu „je v krvi“ človeka, ktorý pil alkohol, nie je jednoduché. Výsledok ovplyvňuje veľa faktorov (vek človeka, jeho hmotnosť, pohlavie, čas, ktorý uplynul od vypitia alkoholu...). Preto sme výpočet zjednodušili tým, že sme „vyliali alkohol do suda“. Všetky vypočítané údaje teda platia pre muža s hmotnosťou 90 kg.

Diskutujte so žiakmi o tom, aké promile alkoholu by mali oni po vypití rovnakého množstva alkoholu a aké by potom bolo ich správanie. Úloha nemá žiakov navádzať na pitie alkoholu, má im priblížiť a zvedomiť problémy, do ktorých sa môžu dostať.

Úloha 6

Práve z dôvodov, ktoré sme opísali pri predchádzajúcej úlohe, sa budú výsledky jednotlivých „kalkulačiek“ od seba odlišovať.

5

V promile sa udáva aj množstvo alkoholu v krvi človeka. Údaj 1 ‰ alkoholu v krvi znamená, že v 1 litri krvi je 1 mililiter alkoholu. Veľké množstvo alkoholu v krvi človeka môže spôsobiť až jeho smrť. Prečítaj si, ako sa správa človek s alkoholom v krvi.

0,3 ‰ až 0,5 ‰	porucha koordinácie, problémy s kontrolou rovnováhy, eufória, znížený úsudok
0,5 ‰ až 0,7 ‰	zníženie reflexov, vzrušenie, zvýšená výrečnosť, zníženie sebakontroly, nesprávny odhad vlastných schopností
0,7 ‰ až 2,0 ‰	porucha rovnováhy a pohybových schopností, zníženie hranice bolesti, redukcia intelektových schopností, predĺženie reakčného času, agresívne správanie
2,0 ‰ až 3,0 ‰	problémy vyjadrovať sa, porucha pohyblivosti a chôdze
3,0 ‰ až 4 ‰	žiadne známky sebakontroly, závažná porucha vedomia, ktorá môže viesť až do kómy
viac ako 4 ‰	život ohrozujúci stav

Množstvo alkoholu v nápojoch
 veľké pivo (500 ml) 5 ‰
 pohár vína (200 ml) 12 ‰
 pohárik vodky (50 ml) 40 ‰

Pán Karol bude mať po vypití alkoholického nápoja rovnaké množstvo alkoholu v krvi, aké by sme našli v sude s vodou, keby sme doň tento nápoj vyliali. Vyplň tabuľku:



Pán Karol vypije:	Objem alkoholu (ml)	Množstvo alkoholu v krvi (‰)
1 veľké pivo	25	0,40
4 veľké piva, 4 vodky	180	2,86
2 poháre vína	48	0,76
1 liter vína	120	1,90
2 poháre vína, 3 vodky	108	1,71
3 veľké piva, 2 poháre vína	123	1,95

6

Aké sú negatívne dôsledky pitia alkoholu?



Založ si banku

PROJEKT

Rozdelte sa do skupín po 5-7 žiakov tak, aby v každej skupine bol dobrý matematik, dobrý slovenčinár, dobrý výtvarník, dobrý rečník, dobrý informatik...

Každá skupina má za úlohu založiť banku. To znamená, že vymyslí a pripraví:

- meno a logo banky,
- produkty banky (za akých podmienok bude požičiavať klientom peniaze a za akých podmienok si budú u nej môcť klienti ukladať peniaze),
- reklamnú kampan banky (reklamný slogan, ktorý zaujme klientov a bude charakterizovať banku, propagačné materiály, brožúry, letáky, akcie, ktoré prilákajú klientov do banky),
- prezentáciu (asi 5-minútové vystúpenie, počas ktorého predstaví banku a jej produkty a bude sa snažiť lákať klientov).



Keď budú všetky skupiny pripravené, pozvite do školy rodičov (to budú vaši budúci klienti). Odprezentujte im svoje banky a zistíte, pre ktorú z nich by sa rozhodli.

Príprava a realizácia celého projektu tak, ako je opísaný, môže trvať aj niekoľko týždňov. Veľká časť práce je na domácej príprave žiakov a kooperácii v skupinách do ktorých sa rozdelili. Nepodceňujte rozdelenie žiakov do skupín – takto dáte možnosť vyniknúť všetkým žiakom v triede (aj tým, ktorí nie sú dobrí v matematike).

Skôr, ako začnú žiaci vymýšľať identifikačné prvky banky (logo, názov, letáky, produkty...) je dobré, aby si pozreli, ako to vyzerá v reálnych bankách. Nech sa do nich vyberú, prinesú letáky, pozrú si ich webové stránky... Samotnú matematiku využijú žiaci pri zostavovaní ponuky banky. Zamerajte sa iba na dve veci: (1) za akých podmienok banka požičiava peniaze a (2) za akých podmienok si u nej môžu klienti uložiť peniaze. Žiaci pri vymýšľaní musia brať do úvahy aj konkurenciu a „postaviť“ svoje produkty tak, aby boli konkurencieschopní.

Samotnú prezentáciu môžete ozvláštniť tým, že na ňu pozvete rodičov alebo kolegov a títo budú predstavovať klientov, ktorí sa budú rozhodovať, ktorú banku by si vybrali. Nech žiaci pripravia prezentáciu na počítači alebo akýmkoľvek iným spôsobom, o ktorom budú presvedčení, že zaujme a priláka klientov. Nezabudnite zdôrazniť, že banka musí pôsobiť dôveryhodne (veď ide o naše peniaze) a diskutujte o tom, ako sa dôveryhodnosť prezentuje (budovy, oblečenie pracovníkov, farebnosť propagačných materiálov...).

Úloha 1

Diskutujte so žiakmi o tom, aké geometrické útvary sú vrcholy, hrany a steny kvádra a kocky.

Úloha 2

Nechávame žiakov kresliť pravý aj ľavý pohľad, neskôr nech si každý žiak vyberie ten, ktorý mu viac vyhovuje.

3 Kváder a kocka

Voľné rovnobežné premietanie, perspektíva

1 Najprv farebne vyznač na obrázku a potom doplň.

Hrany, ktoré nevidíme, kreslíme čiarkovane.

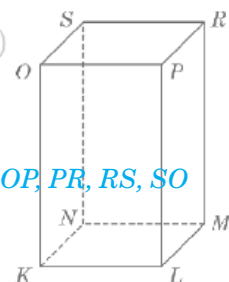
Teleso: **kváder**

Vrcholy: **K, L, M, N, O, P, R, S**

Hrany: **KL, LM, MN, NK, KO, LP, MR, NS,**

Steny: **KLMN, OPRS, KLPO, LMRP, NMRS, KNSO**

Počet vrcholov: **8** Počet hrán: **12** Počet stien: **6**



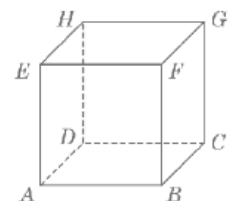
Teleso: **kocka**

Vrcholy: **A, B, C, D, E, F, G, H**

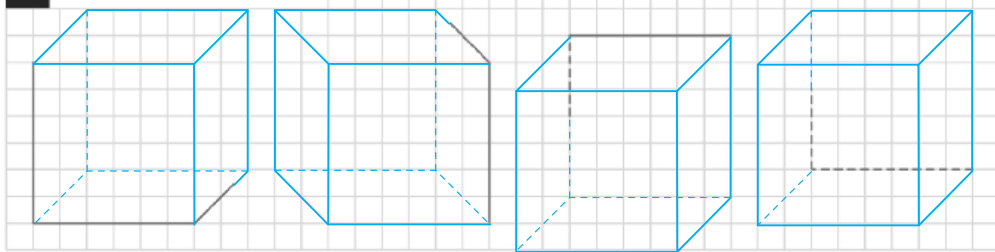
Hrany: **AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE**

Steny: **ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, DCGH, ADHE**

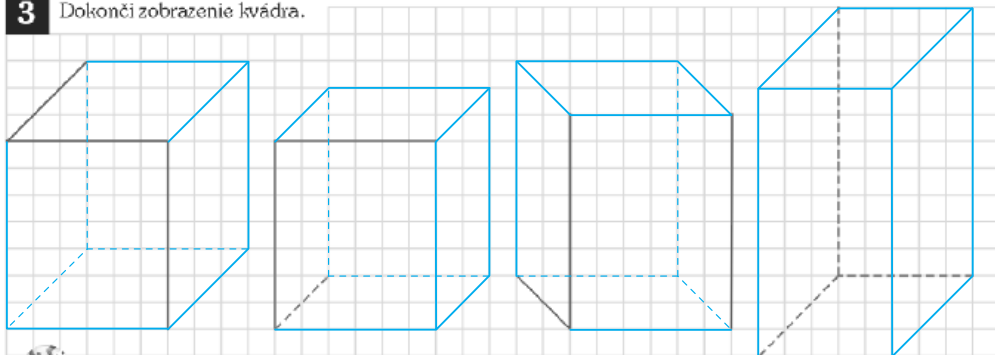
Počet vrcholov: **8** Počet hrán: **12** Počet stien: **6**



2 Dokonči zobrazenie kocky.

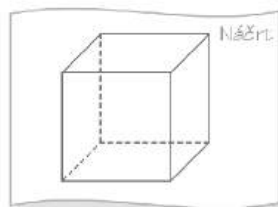
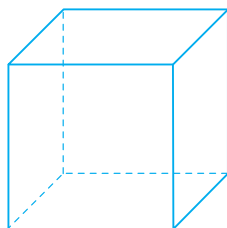
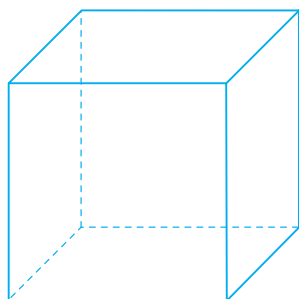


3 Dokonči zobrazenie kvádra.

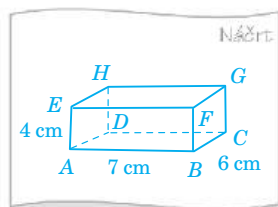
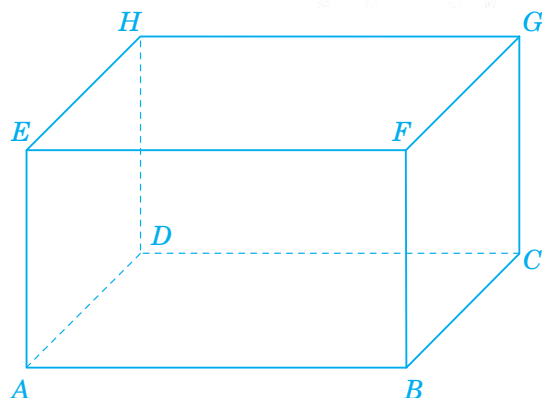


124277

- 4** Vo voľnom rovnobežnom premietaní narysuj obraz kociek s dĺžkou hrany 4 cm a 3 cm.



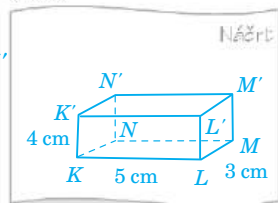
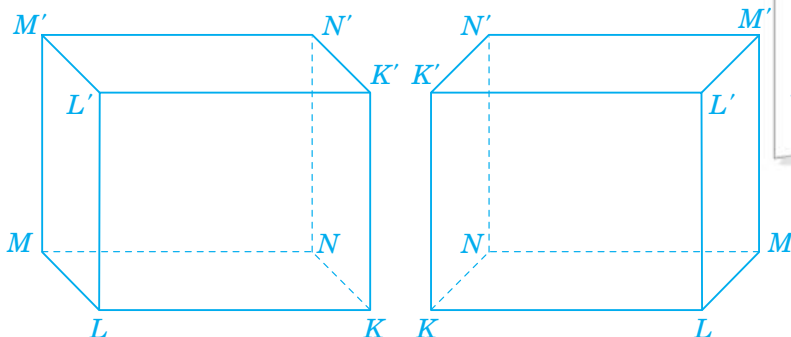
- 5** Vo voľnom rovnobežnom premietaní narysuj obraz kvádra $ABCDEFGH$, ktorého predná stena $ABEF$ je rovnobežná s náčrešou a platí $|AB| = 7$ cm, $|AE| = 4$ cm, $|AD| = 6$ cm.



Rovina, v ktorej zobrazujeme telesá, sa nazýva náčrešou.



- 6** Vo voľnom rovnobežnom premietaní narysuj obraz kvádra $KL MN KL' M' N'$, ktorého stena $KLKL'$ je obdĺžnik rovnobežný s náčrešou a $|KL| = 5$ cm, $|KK'| = 4$ cm, $|LM| = 3$ cm. Narysuj ho v nadhlade zľava aj v nadhlade sprava.



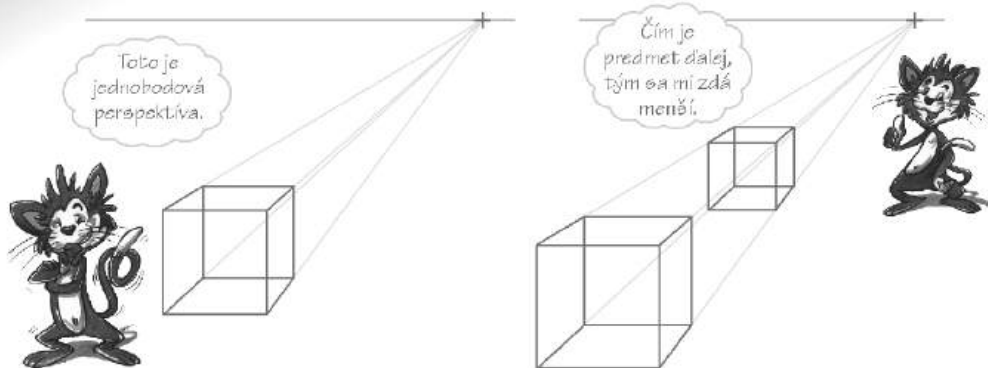
Miesto na náčrt majú žiaci vyznačené osobitne, aby mali neustále na pamäti, že robiť náčrt je užitočné a hlavne zmysuplné. Diskutujte s nimi o tom, prečo je to zmysuplné.

Úloha 1

Kresliť alebo rysovať obrazy telies čo i len v jednobodovej perspektíve vôbec nie je jednoduché. Ale ten pocit, keď sa vám podarí narysovať to správne stojí za to.

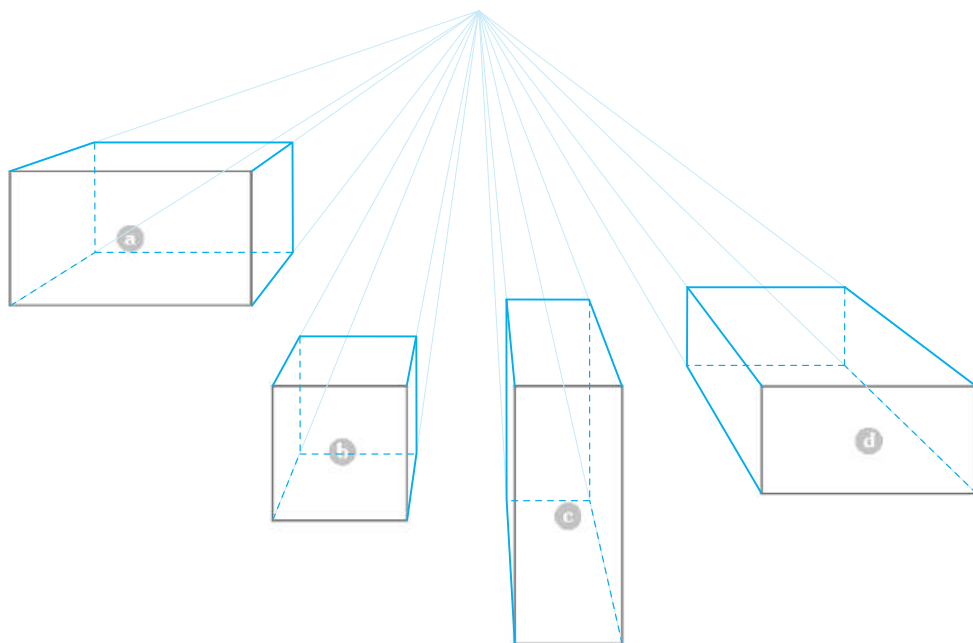
My sme pre vás a vašich žiakov pripravili iba také letmé stretnutie s perspektívou. Skúste ako spojenca vziať učiteľa výtvarnej výchovy a nechajte žiakov kresliť komiksový príbeh. Majte však podmienku: všetky budovy a veci v komikse musia byť nakreslené v perspektíve (jedno, dvoj alebo pre najväčších fanatikov v trojbodovej). Želáme vám príjemné pozeranie a čítanie.

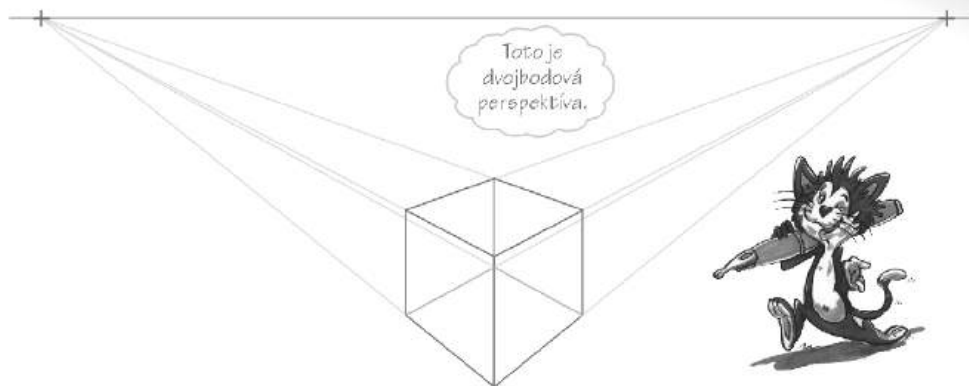
— Kuáder a kocka —



7

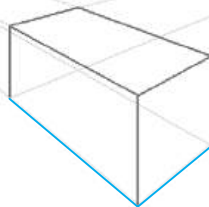
Zo štvorcov a obdĺžnikov vytvor v jednobodovej perspektíve obrazy telies.



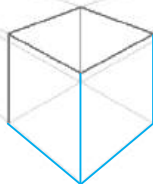


8 V dvojbodovej perspektíve dokresli obrázky kvádrov a kociek.

a



b



9 Vráť sa k úlohám 4 až 6 a v každom obraze dorysuj obraz jednej stenovej a jednej telesovej uhlopriečky kocky alebo kvádra.

Úloha 2

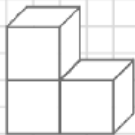
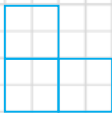
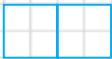
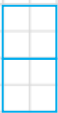
Pre najväčších odvážlivcov pripravte samostatnú prácu – na čistom papieri vyznačte priamku a dva body nechajte žiakov samostatne narysovať obraz kocky alebo kvádra.

Nárys, pôdorys a bokorys

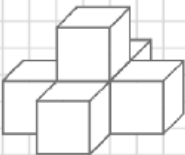
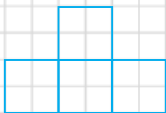
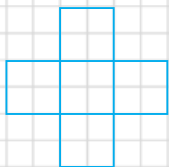
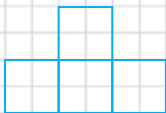
Pre túto aj nasledujúce strany platí: možno sa nájdú vo vašej triede žiaci, ktorí si budú vedieť stavby z kociek predstaviť a splniť zadanie úlohy. My vám však radiíme: zožehňte si kocky a nechajte žiakov, aby stavby stavali, pozerali sa na ne z rôznych strán a potom kreslili čo vidia. Možno budú vaše hodiny trochu hlučnejšie ako ste zvyknutí, no priestorovej predstavivosti vašich žiakov to pomôže oveľa viac ako keby ste ju nechali pracovať samú.

1 Nakresli nárys, pôdorys a bokorys každého telesa.

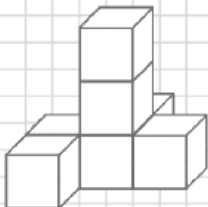
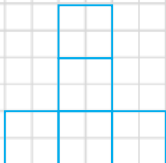
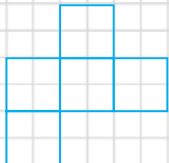
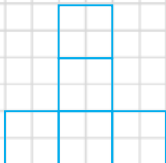
a

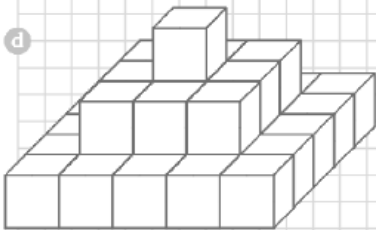
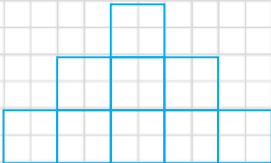
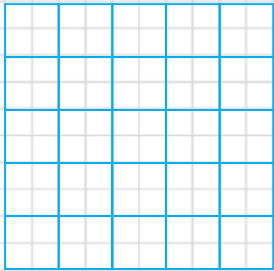
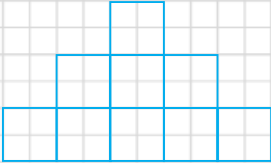
b

c

d


2 Nakresli teleso, ktorého nárys, bokorýs a pôdorýs je na obrázku.

	Nárys	Pôdorýs	Bokorýs	
a				
b				
c				
d				
e				

Nakreslili ste
väčšiu rovnakú
telesá?

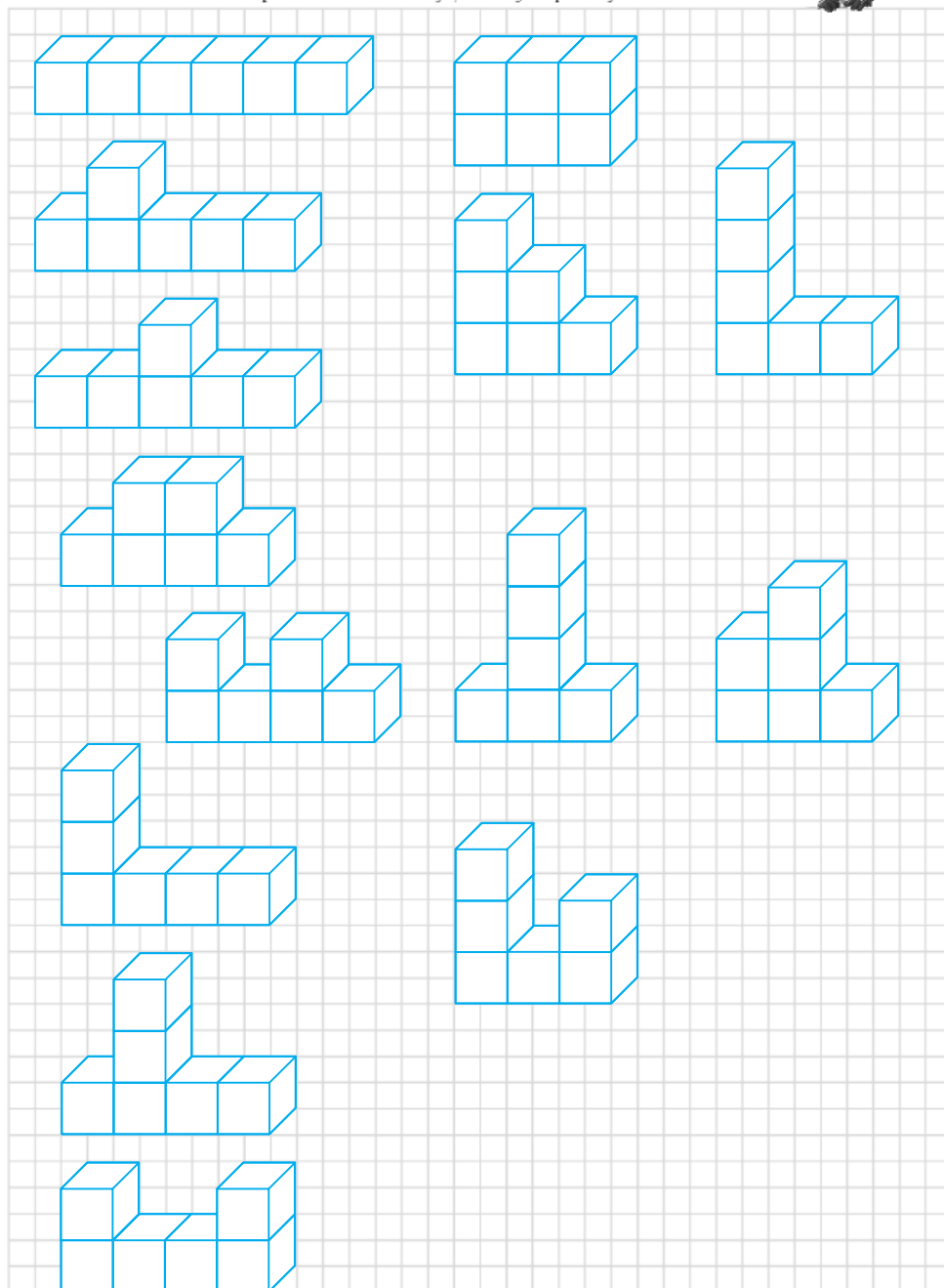


Úloha 3

Ak budú žiaci kresliť obrazy stavieb pomocou kociek s rozmerom $2 \times 2 \times 2$ štvorčeky, zmestia sa im na túto stranu iba obrazy telies bez nárysov, pôdorysov a bokorysov. Je na vás, ako zadáte úlohu žiakom. Jedna z možností je, nech každý postaví a nakreslí čo najviac stavieb, potom rozdeľte triedu na tri skupiny – nárysovú, pôdorysovú a bokorysovú a nechajte každú skupinu kresliť iba príslušné obrázky. Potom skúste spolu priradovať – ktorý nárys, bokorys a pôdorys patrí ktorému telesu.

3

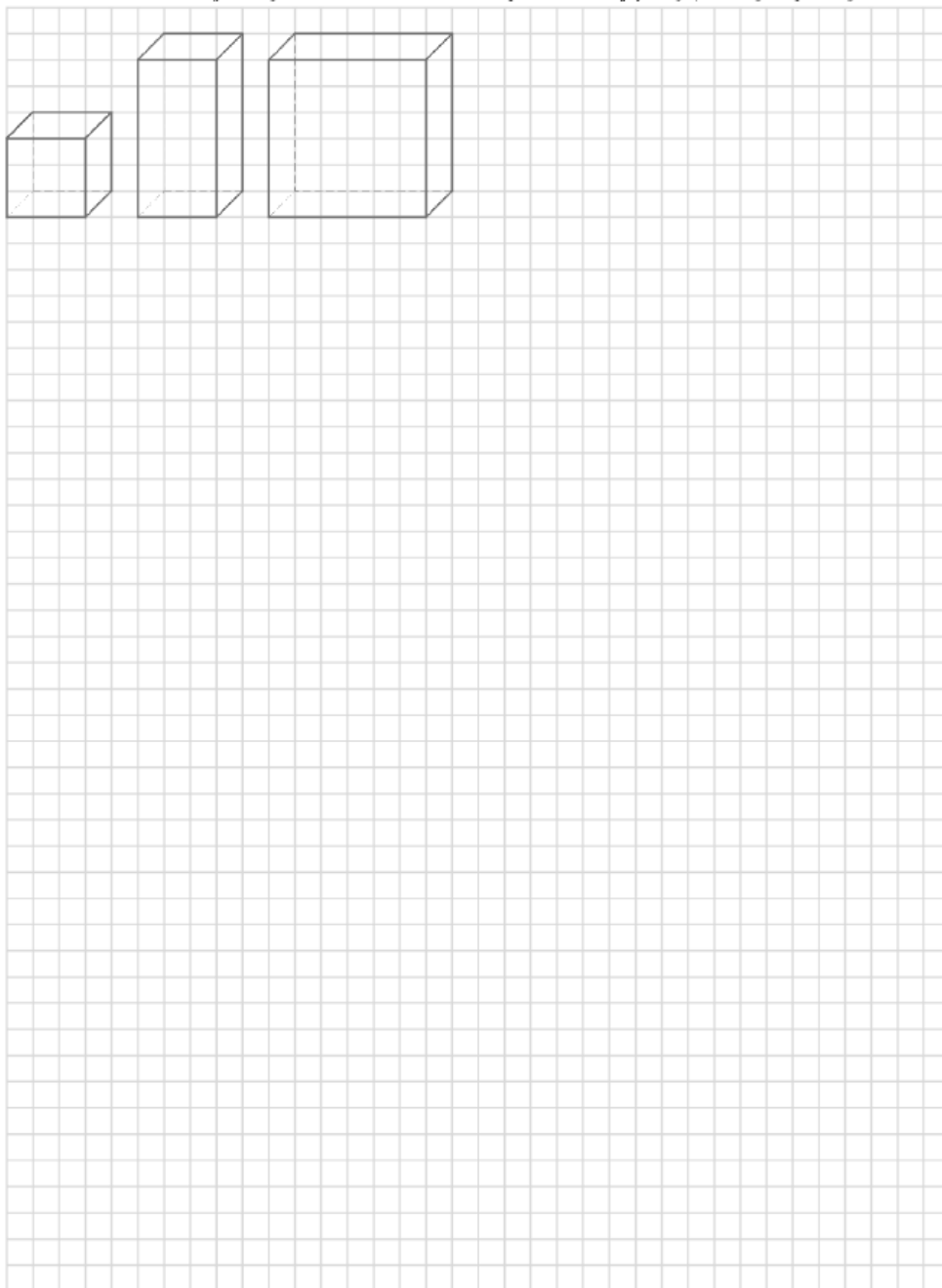
Postav všetky stavby zo šiestich kociek, nakresli ich obraz vo voľnom rovnobežnom premietaní a ich nárys, bokorys a pôdorys.



4

Postav všetky stavby z kociek a kvádrov na obrázku.

Nakreslí obraz každej stavby vo voľnom rovnobežnom premietaní a jej nárys, bokorýs a pôdorys.



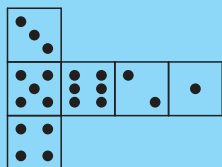
Úloha 4

Nechajte žiakov urobiť papierové modely všetkých troch telies. Potom nech stavajú stavby a kreslia ich obrazy vo voľnom rovnobežnom premietaní.

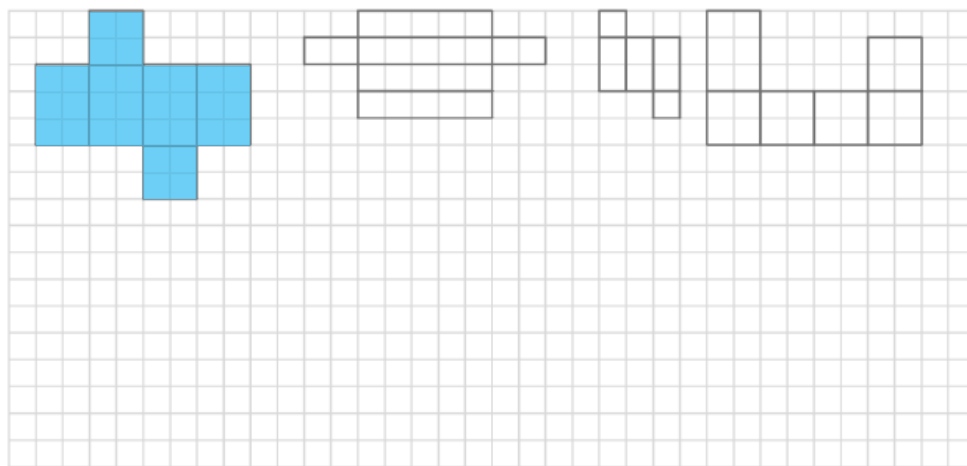
Úloha 7

Ak to vašim žiakom nevychádza, treba ich upozorniť, že siete väčšia na hracích kociet je pravotočivá, ale tá naša je ľavotočivá.

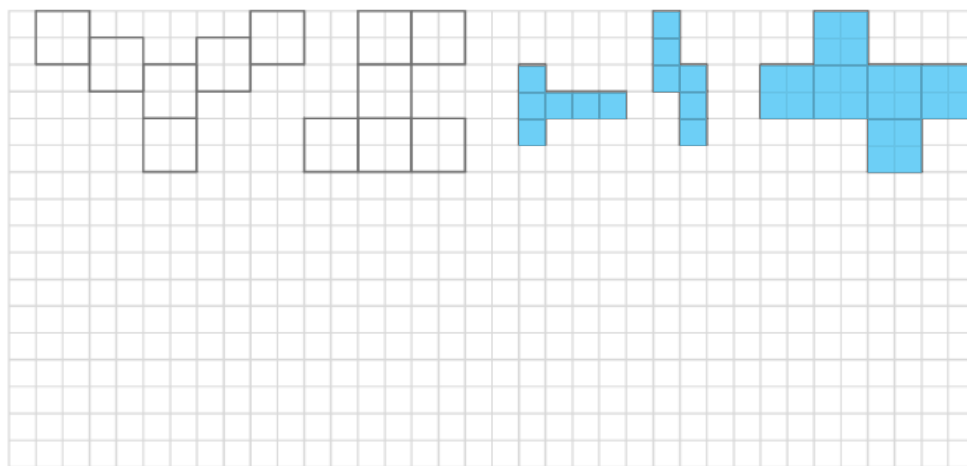
Ak majú problém s predstavivosťou, odporučte im, aby si takúto kocku zostrojili (z papiera), napr. podľa siete na obrázku nižšie.



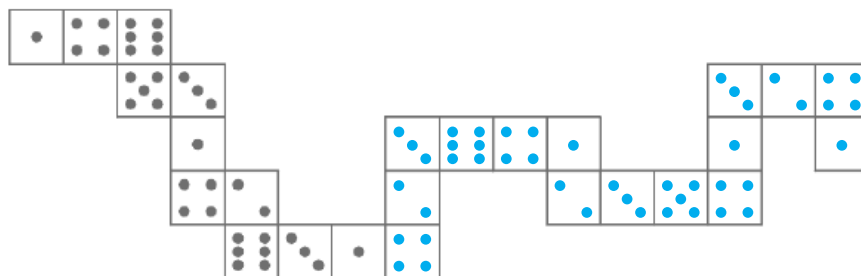
5 Vyfarbi siete kvádra. Nakresli ďalšie siete kvádra.



6 Vyfarbi siete kocky. Nakresli ďalšie siete kocky.



7 Dokresli bodky na stopu, ktorú nechala naša kocka.



Asi najväčší matematický bestseller sa podarilo napísať matematikovi menom Euklides už v 3. storočí p. n. l. Jeho názov je *Základy* a po Biblii je to najviac vydávaná kniha v histórii. Má trinásť veľkých častí, ktoré Euklides volal knihami: šesť o planimetrii, štyri o aritmetike a tri o stereometrii. Planimetria je tá časť geometrie, ktorá sa uspokojí s jednou rovinou (*planum* je po grécky rovina). Stereometria potrebuje celý priestor (*stereo* = pevné teleso, čosi v priestore) a aritmetika je zase veda o číslach (*aritos* = číslo). V týchto knihách je množstvo krásnej matematiky, sem sa nám vmiesť iba jedna ukážka.

Euklides v *Základoch* opísal zaujímavý postup na hľadanie prvočísel:

Vezmem prvé dve: 2, 3 a vypočítam: $2 \cdot 3 + 1 = 7$
 Pridám tretie: 5 a vypočítam: $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$
 Pridám štvrté: 7 a vypočítam...

Nanešťastie to stále nefunguje. Zisti, kedy už nevýjde prvočíslo.



Egyptskému vládcovi Ptolemaiovi I. sa zdalo, že zvládnuť matematiku štúdiom *Základov* je príliš ťažké. Vtedy mu Euklides povedal vetu, ktorá platí dodnes: „V matematike niet osobitej cesty pre kráľov.“

Aj v 3. storočí nášho letopočtu (asi) žil zaujímavý matematik, ktorý robil zaujímavú matematiku. Vlastne nevieme, či bola zaujímavá iba jeho matematika alebo aj on, pretože všetko, čo vieme o jeho živote, sa zachovalo v tejto básni:

Na Diofantovom prachu náhrobný kameň ti povie zložitým umením múdrych, akého dožil sa veku.
 Z vôle všemocných bohov najprv šestina žitia prešla mu v detských hrách.
 Polku tej šestiny vitál s páperom na mladých lícach.
 Po ďalšej sedmine žitia družku on za ženu pojal.
 Po piatich spoločných rokoch dožil sa filozof syna.
 Iba pol otcovho veku prežil s ním ľúbený syn.
 Na veľkú otcovu biedu vzal mu ho predčasný hrob.
 Nešťastný otec ho v žiali oplakal dvakrát dva roky, kým uzrel poslednú chvíľu smutného života svojho.

Vypočítaj, koľko rokov žil Diofantos.

Pokús sa podobne zabásniť svoj vek.

Nech vaši žiaci nájdu viac informácií o Euklidovi či inom starovekom alebo novovekom matematikovi. Urobte si hodinu História matematiky, na ktorej môžu žiaci napríklad v dobových kostýmoch informovať svojich spolužiakov o zaujímavostiach zo života týchto géniov i o ich objavoch. Nezapadnite pozvať rodičov!

Vysvetlite si so žiakmi, čo sú to **prvočísla**. Dôraz kladieme na slovné spojenie „vysvetlite si“. To znamená, že nie vy ste ten/tá, kto to musí ostatným vysvetliť. Nechajte žiakov, nech si našťudujú, čo sú to prvočísla, a navzájom si vysvetlia tento krásny (a jednoduchý) matematický pojem.

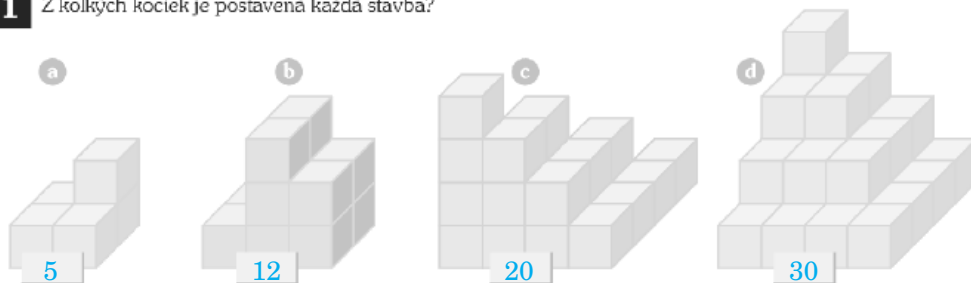
Úloha 2

Žiaci si môžu dokresliť kocky do obrázka tak, alebo si každý kváder vymodelujú na lavici z menších kociek. Práca so skutočnými kockami je síce hlučná, ale pre žiakov veľmi atraktívna. Navyše, veľmi dobre pomáha pri budovaní pojmu *objem* a pri utváraní predstavy o jednotkách objemu.

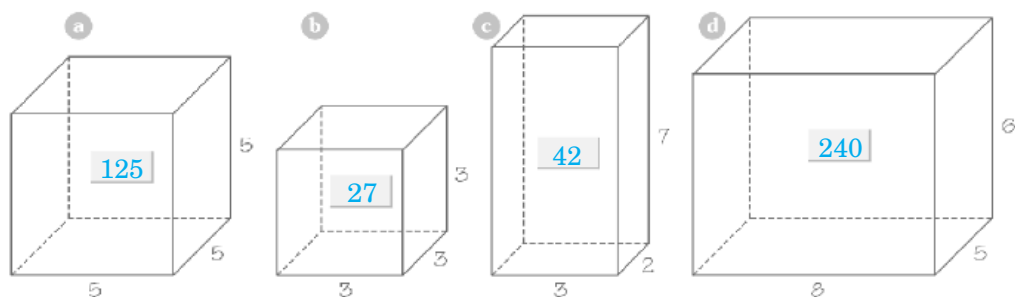
4 Objem a povrch kocky a kvádra

Jednotky objemu

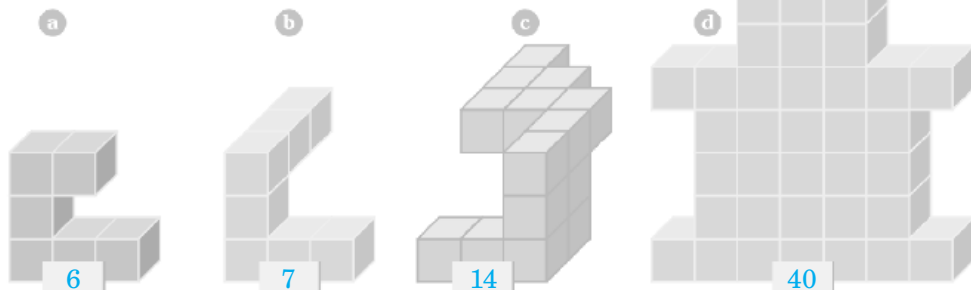
1 Z koľkých kociek je postavená každá stavba?



2 Z koľkých kociek s rozmermi $1 \times 1 \times 1$ sú postavené kocky a kvádre?

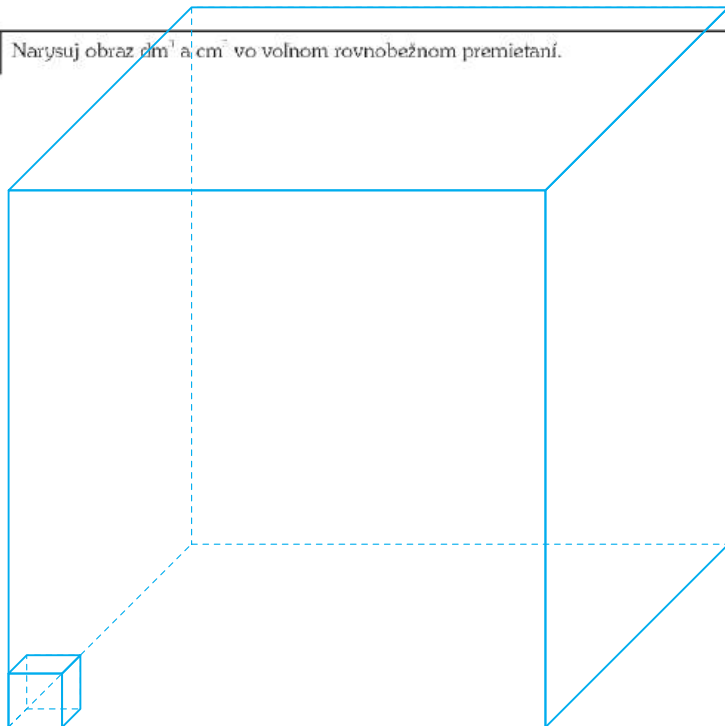


3 Z koľkých kociek s rozmermi $1 \times 1 \times 1$ je zlepené každé teleso?





- 4** Narysuj obraz dm^3 a cm^3 vo voľnom rovnobežnom premietaní.



Úloha 4

Získať predstavu o tom, čo je skutočne 1 cm^3 alebo 1 dm^3 , je veľmi dôležité. Pomôže nám aj narysovanie obrazu týchto jednotiek vo voľnom rovnobežnom premietaní. Oveľa lepšie však je, ak si každý žiak zhotoví model decimetra kubického alebo centimetra kubického. Ak by ste mali dostatočný počet kociek, môžete si v triede poskladať aj meter kubický.

Úloha 6

Vyznačte si aj vzťah medzi cm^3 a mililitrom.

- 5** Odpovedz a doplň.

- a) Koľko kociek s hranou dĺhou 1 dm sa zmestí do kocky s hranou dĺhou 1 m ? 1 000

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$$

- b) Koľko kociek s hranou dĺhou 1 cm sa zmestí do kocky s hranou dĺhou 1 m ? 1 000 000

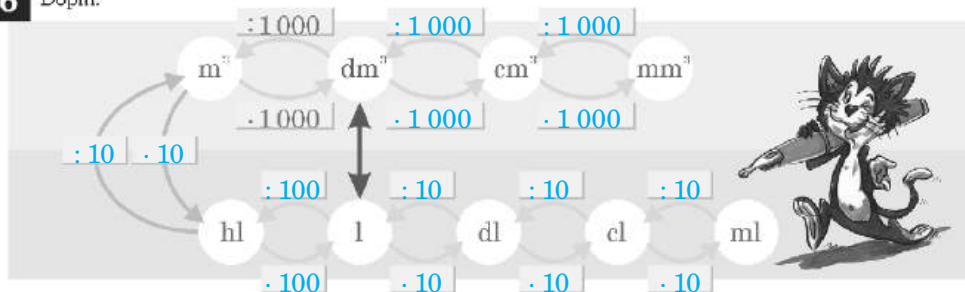
$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

- c) Koľko kociek s hranou dĺhou 1 m sa zmestí do kocky s hranou dĺhou 1 km ? 1 000 000 000

$$1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$$



- 6** Doplň.



Úloha 8

Už to máš?

7 Premeň.

a	$2,4 \text{ dm}^3 = 2\,400 \text{ cm}^3$	b	$110 \text{ dl} = 11 \text{ l}$	c	$18 \text{ l} = 18 \text{ dm}^3$
	$815 \text{ mm}^3 = 0,815 \text{ cm}^3$		$4 \text{ m}^3 = 4\,000 \text{ l}$		$6\,767 \text{ cm}^3 = 6,767 \text{ dm}^3$
	$5 \text{ l} = 5\,000 \text{ cm}^3$		$2,3 \text{ dm}^3 = 2,3 \text{ l}$		$1,2 \text{ m}^3 = 1\,200 \text{ dm}^3$
	$0,45 \text{ m}^3 = 450\,000 \text{ cm}^3$		$5\,000 \text{ cm}^3 = 5 \text{ l}$		$1\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ dm}^3$
	$305 \text{ dm}^3 = 305\,000 \text{ cm}^3$		$23\,000 \text{ cl} = 230 \text{ l}$		$60 \text{ dl} = 6 \text{ dm}^3$

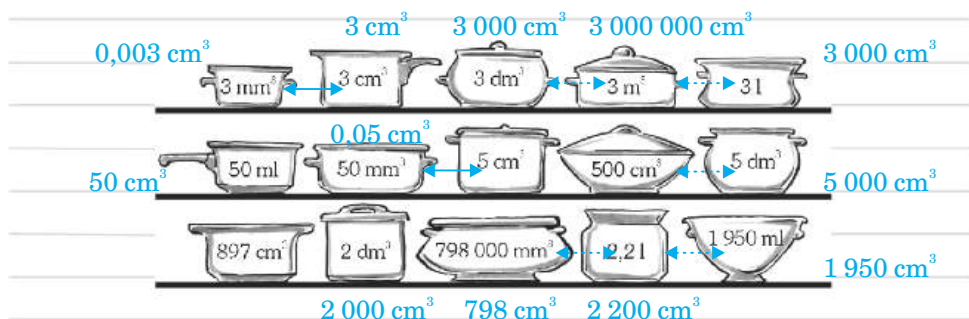
8 Usporiadaj objemy zostupne.



9 V každom riadku vyznač rovnaké objemy.

- a 9 l; $0,9 \text{ dm}^3$; $9\,000 \text{ cm}^3$; $0,009 \text{ m}^3$; 9 dm^3
- b 315 cm^3 ; $3,15 \text{ dm}^3$; $315\,000 \text{ mm}^3$; $0,315 \text{ l}$; $31,5 \text{ dm}^3$
- c 45 hl ; $4\,500 \text{ l}$; $4,5 \text{ m}^3$; $4\,500 \text{ dm}^3$; 45 m^3

10 Zisti, medzi ktorými susednými nádobami na jednej polici je najmenší (najväčší) rozdiel objemov.



↔ Najmenší rozdiel

⋯ najväčší rozdiel



Objem kvádra a kocky

Úloha 2

Pozor na rozdielne jednotky!

1 Vypočítaj objem kocky s hranou danej dĺžky.

a $a = 5 \text{ cm}$

$$V = a^3$$

$$V = 125 \text{ cm}^3$$

$$V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

b $a = 10 \text{ dm}$

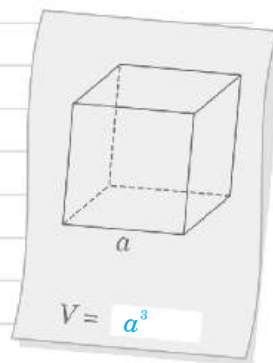
$$V = 1\,000 \text{ dm}^3$$

c $a = 3 \text{ m}$

$$V = 27 \text{ m}^3$$

d $a = 4,5 \text{ mm}$

$$V = 91,125 \text{ mm}^3$$



2 Vypočítaj objem kvádra s danými rozmermi.

a $a = 5 \text{ dm}, b = 3 \text{ dm}, c = 4 \text{ dm}$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 60 \text{ dm}^3$$

$$V = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ dm}^3$$

b $a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ dm}, c = 70 \text{ cm}$

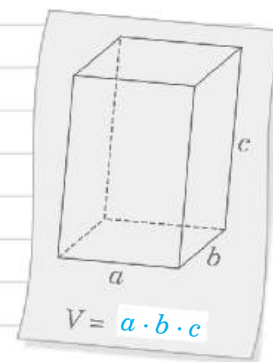
$$V = 2\,100 \text{ dm}^3$$

c $a = 73 \text{ dm}, b = 3,5 \text{ m}, c = 0,005 \text{ km}$

$$V = 127,75 \text{ dm}^3$$

d $a = 0,24 \text{ dm}, b = 0,7 \text{ cm}, c = 8 \text{ mm}$

$$V = 1,344 \text{ cm}^3$$



3 Vypočítaj objem telesa v daných jednotkách.

a kocka

b kocka

c kváder

d kváder

$$a = 6 \text{ dm}$$

$$a = 1,3 \text{ cm}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$a = 5 \text{ mm}$$

$$V = 2\,160 \text{ dl}$$

$$V = 0,002\,197 \text{ l}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

$$b = 7 \text{ mm}$$

$$c = 10 \text{ m}$$

$$c = 9 \text{ mm}$$

$$V = 800 \text{ hl}$$

$$V = 0,315 \text{ ml}$$

$$216 \text{ dm}^3$$

$$2,197 \text{ cm}^3$$

$$80 \text{ cm}^3$$

$$315 \text{ mm}^3$$

$$216 \text{ l}$$

$$0,002\,197 \text{ dm}^3$$

$$80\,000 \text{ dm}^3$$

$$0,315 \text{ cm}^3$$

$$2\,160 \text{ dl}$$

$$0,002\,197 \text{ l}$$

$$80\,000 \text{ l}$$

$$0,315 \text{ ml}$$

$$800 \text{ hl}$$

Učme žiakov kresliť si náčrty aj pri výpočtovej geometrii. Spôsob zápisu úlohy a jej riešenia nechávame na vás.

- 4** Akvárium má dĺžku 0,7 m a šírku 25 cm. Akú má hĺbku, ak doň vojde najviac 87,5 litra vody?

$$V = 87,5 \text{ l} = 87,5 \text{ dm}^3$$

$$c = V : (a \cdot b)$$

$$c = 5 \text{ dm}$$

Akvárium má hĺbku 5 dm.



Tretí rozmer kvádra vypočítaš tak, že objem vydelíš obsahom steny kvádra, ktorej rozmery poznáš.

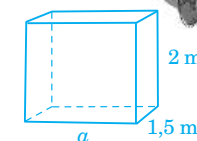
- 5** Skriňa má objem $5,4 \text{ m}^3$, výšku 2 m a šírku 1,5 m. Aký je tretí rozmer skrine?

$$V = 5,4 \text{ m}^3$$

$$a = V : (b \cdot c)$$

$$a = 1,8 \text{ dm}$$

Tretí rozmer skrine je 1,8 m.



- 6** Róbert má čokoládu s rozmermi 8,2 cm, 3,1 cm a 0,8 cm. Norbert má čokoládu s rozmermi 0,4 cm, 5 cm a 7,9 cm. Kto z nich má viac čokolády a o koľko?

Róbert

$$V = 20,336 \text{ cm}^3$$

Norbert

$$V = 15,8 \text{ cm}^3$$

$$20,336 - 15,8 = 4,536$$

Viac čokolády má Róbert, o $4,536 \text{ cm}^3$.



- 7** Kocka s hranou 1 cm má hmotnosť 0,2 kg. Akú hmotnosť má kocka z toho istého materiálu s hranou dĺžhou 4 cm?

$$a = 1 \text{ cm}$$

$$V = 1 \text{ cm}^3$$

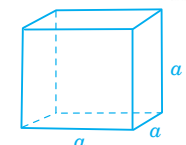
$$m = 0,2 \text{ kg}$$

$$a = 4 \text{ cm}$$

$$V = 64 \text{ cm}^3$$

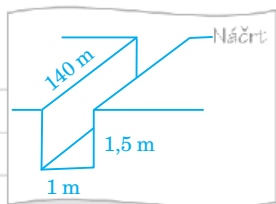
$$m = 12,8 \text{ kg}$$

Kocka s hranou 4 cm má hmotnosť 12,8 kg.



- 8** Pri výstavbe plynovodu dlhého 140 m treba vytvoriť jamu so zvislými stenami hlbokú 1,5 m a širokú 1 m.

a Koľko m³ zeminu treba vykopat?



b Vykopanú zeminu rovnomerne rozhrnieme na ihrisku s rozmermi 70 m a 120 m. Aká vysoká bude vrstva novej hliny na ihrisku?

$$V = 210 \text{ m}^3$$

$$c = 210 : (70 \cdot 120)$$

$$c = 0,025 \text{ m}$$

Treba vykopat 210 m³ zeminu.

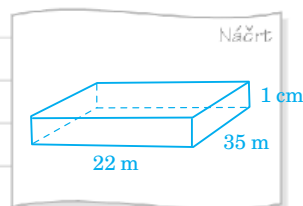
Vrstva hliny bude vysoká 2,5 cm.

- 9** Vo štvrtok spadol 1 cm zrážok. Koľko litrov vody napršalo na záhradu tvaru obdĺžnika s rozmermi 22 m a 35 m?

$$a = 22 \text{ m} = 220 \text{ dm}$$

$$b = 35 \text{ m} = 350 \text{ dm}$$

$$c = 1 \text{ m} = 0,1 \text{ dm}$$



$$V = 7\,700 \text{ dm}^3$$

$$V = 7\,700 \text{ l}$$

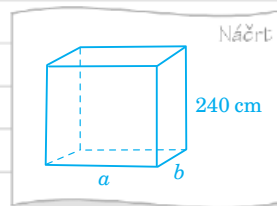
Na záhradu napršalo 7 700 l vody.

- 10** Miestnosť vysoká 240 cm má objem 48 m³. Koľko ľudí v nej môže pracovať, ak na každého pracovníka má pripadať aspoň 7 m² podlahovej plochy?

$$S = a \cdot b$$

$$S = V : c$$

$$S = 20 \text{ m}^2$$



V miestnosti môžu pracovať 2 ľudia.

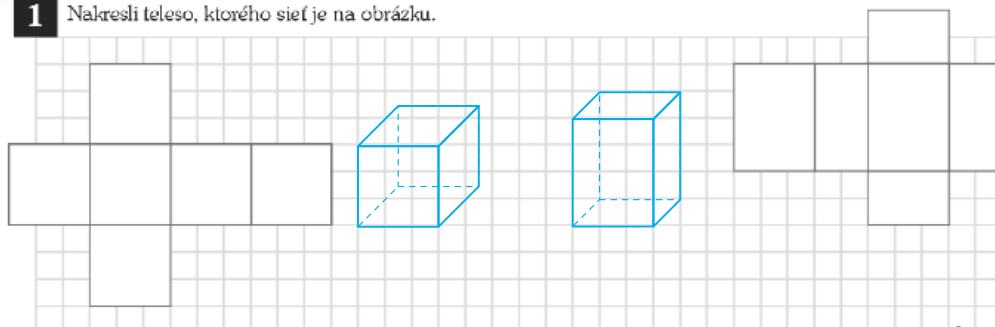


Úloha 3

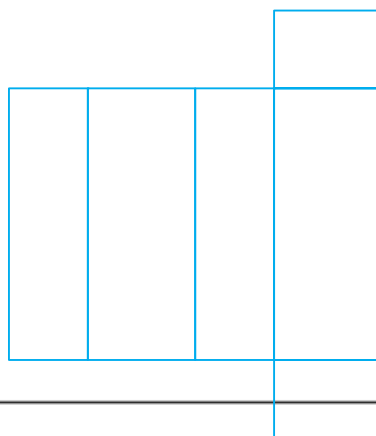
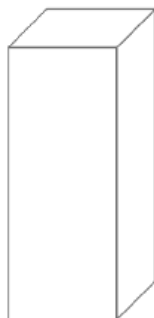
Skúška správnosti znamená „vystrihni a zlož“.

Povrch kvádra a kocky

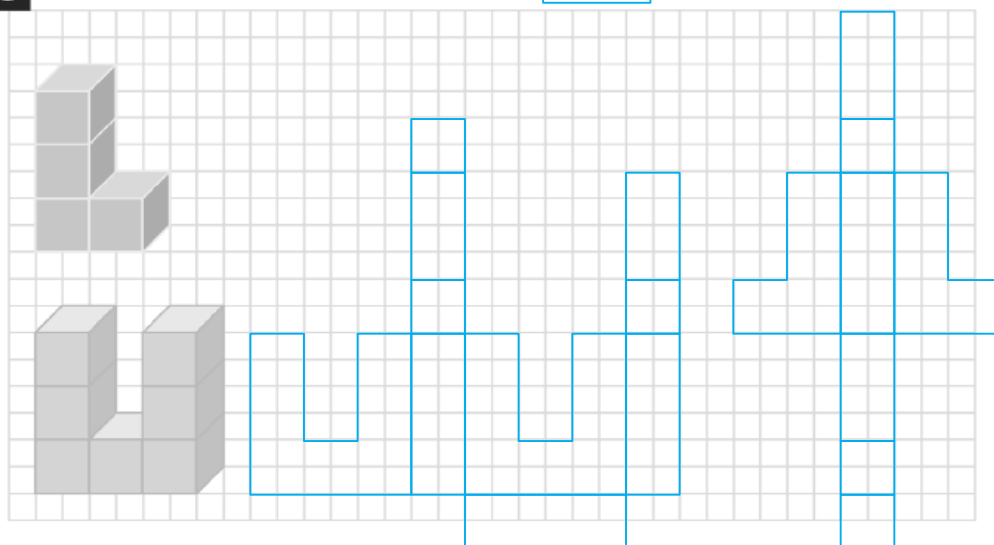
1 Nakresli teleso, ktorého sieť je na obrázku.



2 Narysuj sieť kvádra.

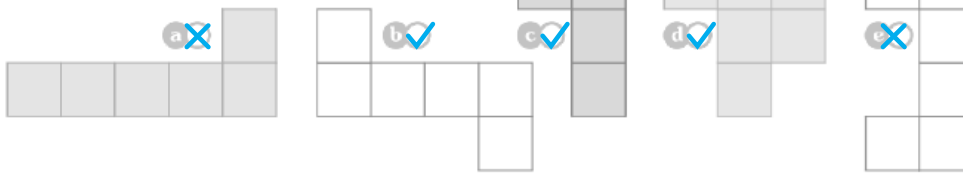


3 Nakresli sieť týchto telies.

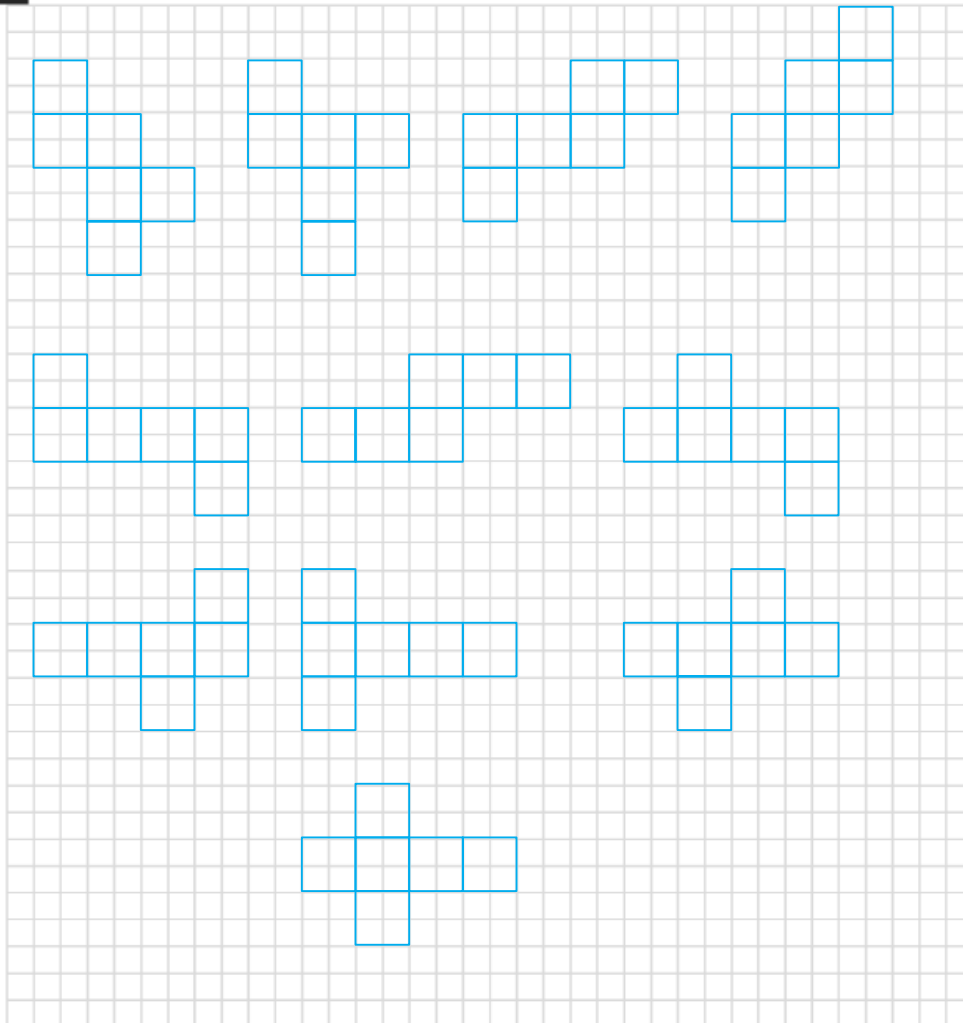


4 Na ktorých obrázkoch je sieť kocky?

✓ je ✗ nie je



5 Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky.



Úloha 5

Skúška správnosti opäť znamená „vystrihni a zlož“. Existuje 11 rôznych sietí kocky.



Úloha 8

Pozor na rozdielne jednotky!

— Objem a povrch kocky a kvádra —



6 Doplň tabuľku.

km ²	ha	a	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
0,000 000 1	0,000 1	0,01	1	100	10 000	1 000 000
0,000 7	0,07	7	700	70 000	7 000 000	700 000 000
0,000 035	0,003 5	0,35	35	3 500	350 000	35 000 000
0,007	0,7	70	7 000	700 000	70 000 000	7 000 000 000
0,000 002 5	0,000 25	0,025	2,5	250	25 000	2 500 000
0,007 5	0,75	75	7 500	750 000	75 000 000	7 500 000 000

7 Vypočítaj povrch kocky.

a $a = 3 \text{ m}$

$$S = 6a^2$$

$$S = 54 \text{ m}^2$$

$$S = 6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 = 54$$

b $a = 0,2 \text{ dm}$

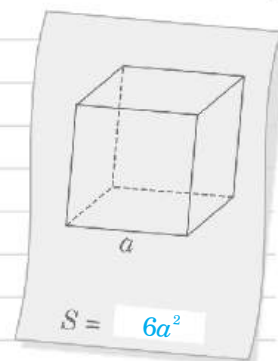
$$S = 0,24 \text{ dm}^2$$

c $a = 45 \text{ mm}$

$$S = 12 150 \text{ mm}^2$$

d $a = 7,05 \text{ cm}$

$$S = 298,215 \text{ cm}^2$$



8 Vypočítaj povrch kvádra.

a $a = 6 \text{ dm}, b = 4 \text{ dm}, c = 5 \text{ dm}$

$$S = 2(ab + bc + ca)$$

$$S = 148 \text{ dm}^2$$

$$S = 2(6 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6)$$

$$S = 148$$

b $a = 20 \text{ cm}, b = 35 \text{ cm}, c = 42 \text{ cm}$

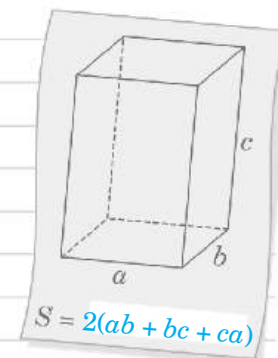
$$S = 6 020 \text{ cm}^2$$

c $a = 6 \text{ dm}, b = 2 \text{ m}, c = 4 \text{ cm}$

$$S = 260,8 \text{ dm}^2$$

d $a = 3,5 \text{ dm}, b = 0,7 \text{ m}, c = 730 \text{ mm}$

$$S = 20 230 \text{ cm}^2$$



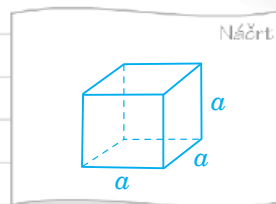
9 Kocka má povrch 216 cm^2 . Aká je dĺžka jej hrany?

$$a^2 = S : 6$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

Dĺžka hrany kocky je 6 cm.



10 Kváder má povrch 42 dm^2 a jeho dva rozmery sú 3 dm a 20 cm. Jeho tretí rozmer má veľkosť:

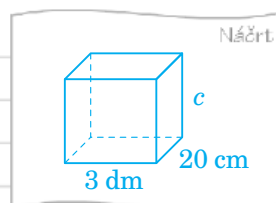
a ☐ 2 dm

$$42 = 2(3 \cdot 2 + 3 \cdot c + 2 \cdot c)$$

b ☒ 30 cm

$$c = 3 \text{ dm}$$

c ☐ 0,4 m



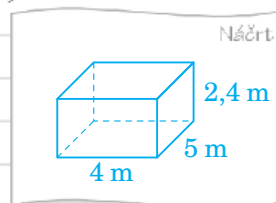
11 Miestnosť má rozmery 4 m, 5 m a 2,4 m. Koľko plechoviek farby treba na vymalovanie stien a stropu tejto miestnosti, ak jedna plechovka vystačí na 10 m^2 ?

$$S = ab + 2(bc + ca)$$

$$S = 63,2 \text{ m}^2$$

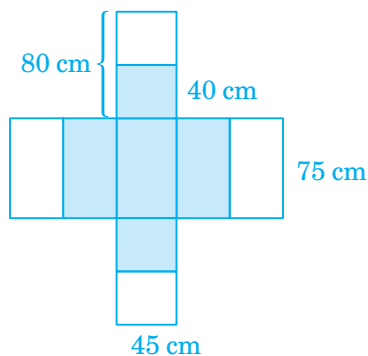
$$63,2 \rightarrow 70 \text{ m}^2 \rightarrow 7 \text{ plechoviek}$$

Potrebuje 7 plechoviek farby.



12 V akváriu s rozmermi dna 75 cm a 45 cm je 135 litrov vody.

Aký je obsah plôch, ktoré sú zmáčané vodou, ak hladina siaha do polovice výšky akvária? Nakresli sieť akvária a vyfarbi zmáčané plochy.



$$c = V : (a \cdot b)$$

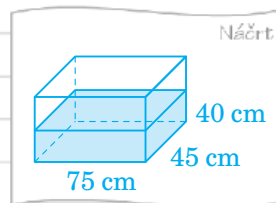
$$c = 40 \text{ cm}$$

$$S = ab + 2(bc + ca)$$

$$S = 12\,975 \text{ cm}^2$$

V akváriu je zmáčaných

$12\,975 \text{ cm}^2$ stien.



Pri náčrtoch je dobré pracovať s farebnými ceruzkami.

Úloha 11

Podlahu nemaľujeme.

Úloha 12

Zmáčaných vodou je iba päť stien akvária. (Predpokladáme, že voda presakuje cez piesok a štrk na dne akvária.)



Krížom-krážom objemom a povrchom

- 1** Červená kocka má hranu o 0,2 dm menšiu ako modrá kocka. Povrch modrej kocky je 294 cm². Aké sú rozmery kociek?

Modrá kocka

$$a^2 = S : 6$$

$$a^2 = 49$$

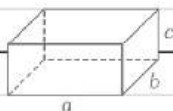
$$a = 7$$

Červená kocka

$$a = 7 - 2$$

$$a = 5$$

$$0,2 \text{ dm} = 2 \text{ cm}$$



- 2** Doplň tabuľku.

Dĺžka kvádra (a)	Šírka kvádra (b)	Výška kvádra (c)	Objem kvádra	Povrch kvádra	Obsah podstavy	Obsah prednej steny	Obsah bočnej steny
10 cm	6 cm	15 cm	900 cm ³	600 cm ²	60 cm ²	150 cm ²	90 cm ²
20 cm	10 cm	30 cm	6 000 cm ³	2 200 cm ²	200 cm ²	600 cm ²	300 cm ²
15 mm	12 mm	15 mm	2 700 mm ³	1 170 mm ²	180 mm ²	225 mm ²	180 mm ²
8 cm	5 cm	17 cm	680 cm ³	522 cm ²	40 cm ²	136 cm ²	85 cm ²
4 m	6 m	5 m	120 m ³	148 m ²	24 m ²	20 m ²	30 m ²
3 m	3 m	3 m	27 m ³	54 m ²	9 m ²	9 m ²	9 m ²
6 cm	6 cm	10 cm	360 cm ³	312 cm ²	36 cm ²	60 cm ²	60 cm ²

- 3** Máš k dispozícii trojlitrový a päťlitrový hrniec.

a Ako pomocou nich odmeriaš práve 4 litre?

$$2 \cdot 5 \text{ l} - 2 \cdot 3 \text{ l}$$

b Aké iné objemy vieš pomocou nich namerať?

$$1 \text{ l} = 2 \cdot 3 \text{ l} - 1 \cdot 5 \text{ l}$$

$$2 \text{ l} = 1 \cdot 5 \text{ l} - 1 \cdot 3 \text{ l}$$

$$3 \text{ l}$$

$$4 \text{ l} = 2 \cdot 5 \text{ l} - 2 \cdot 3 \text{ l}$$

$$5 \text{ l}$$

$$6 \text{ l} = 2 \cdot 3 \text{ l}$$

$$7 \text{ l} = 2 \cdot 5 \text{ l} - 3 \text{ l}$$

$$8 \text{ l} = 5 \text{ l} + 3 \text{ l}$$

$$9 \text{ l} = 3 \cdot 3 \text{ l}$$

$$10 \text{ l} = 2 \cdot 5 \text{ l} \dots$$



124514 124736

- 4** Na podstení domu sú tri stĺpy so štvorcovou podstavou vysoké 2,8 m a hrubé 6,5 dm. Koľko zaplatíme, keď ich chceme obložiť doskami a za 1 m² obkladu si firma účtuje 12 eur?

$$S_{pl} = 4 \cdot 0,65 \cdot 2,8$$

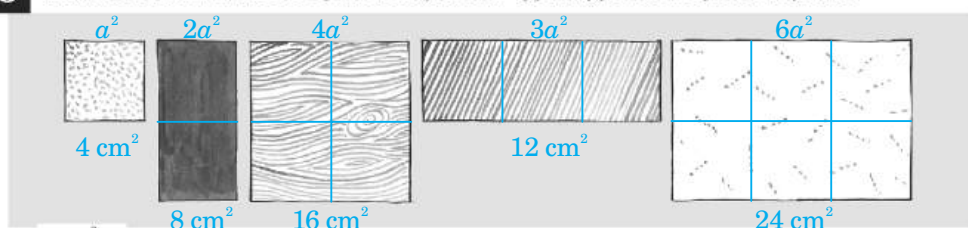
$$S_{pl} = 7,28 \text{ m}^2$$

$$3 \cdot 7,28 \text{ m}^2 = 21,84 \text{ m}^2$$

$$21,84 \cdot 12 = 262,08$$

Zaplatíme 262,08 eura.

- 5** Škatule na obrázku sú zložené z predkreslených častí. Vypočítaj povrch a objem každej z nich.



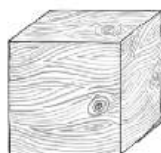
$$6a^2 \text{ cm}^2$$

$$a^3 \text{ cm}^3$$



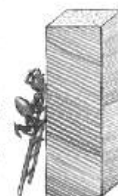
$$16a^2 \text{ cm}^2$$

$$4a^3 \text{ cm}^3$$



$$24a^2 \text{ cm}^2$$

$$8a^3 \text{ cm}^3$$



$$14a^2 \text{ cm}^2$$

$$3a^3 \text{ cm}^3$$

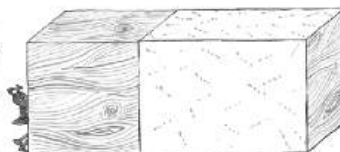


$$10a^2 \text{ cm}^2$$

$$2a^3 \text{ cm}^3$$

$$48a^2 \text{ cm}^2$$

$$20a^3 \text{ cm}^3$$



$$22a^2 \text{ cm}^2$$

$$6a^3 \text{ cm}^3$$

Úloha 5

Urobiť všeobecné riešenie tejto úlohy je zatiaľ nad matematické možnosti vašich žiakov. Nech si zmerajú jednotlivé dĺžky, a potom vypočítajú objemy a povrchy telies.

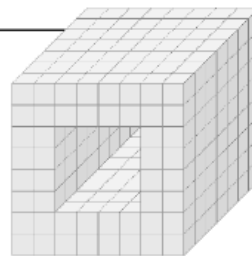


Úloha 7

Jeden i druhý spôsob riešenia je správny. Nájdu vaši žiaci ďalší?

6 Vypočítaj objem kvádra s „tunelom“.

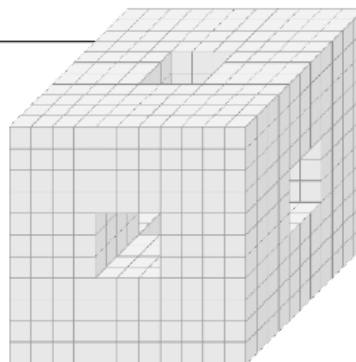
$$\begin{aligned} 8 \cdot 7 \cdot 8 - 4 \cdot 7 \cdot 4 &= \\ = 448 - 112 &= 336 \text{ kociek} \end{aligned}$$



7 Vypočítaj objem kocky s tromi „tunelmi“.

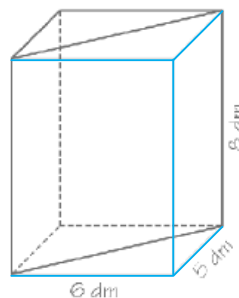
$$\begin{aligned} \text{a) } 11 \cdot 11 \cdot 11 - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 &= \\ = 1\,331 - 297 + 54 &= 1\,088 \text{ kociek} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1\,331 - 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 &= \\ = 1\,088 \text{ kociek} \end{aligned}$$



8 Vypočítaj objem vyznačenej časti kvádra.

$$\begin{aligned} V &= (6 \cdot 5 \cdot 8) : 2 \\ V &= 120 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$



9 Plastelínový kváder má rozmery 4 cm, 5 cm a 6 cm. Chceme ho prerobiť na kocku s hranou 5 cm. Zvýši nám plastelína alebo nám bude chýbať? Koľko?

$$\text{Kváder } V = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \text{ cm}^3$$

$$\text{kocka } V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

Bude nám chýbať 5 cm³ plastelíny.

10 Čo má väčší povrch? Kocka alebo schody? Vypočítaj rozdiel.

Kocka $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ štvorcov

schody $2 \cdot (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 42$

$2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$

$12 \cdot 6 = 72$

spolu $42 + 72 + 72 = 186$ štvorcov

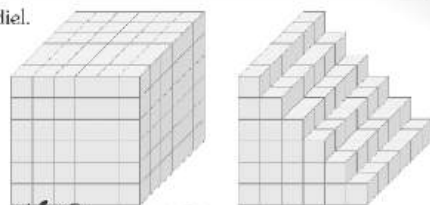
Kocka má väčší povrch ako 30 štvorcov.

11 Aký je povrch telesa na obrázku?

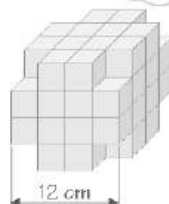
Taký istý ako povrch kocky

s hranou 12 cm.

$6 \cdot 12 \cdot 12 = 864 \text{ cm}^2$



Telesá sa skladajú z rovnakých kociek.



12 Kocku s hranou 6 cm natrieme na žltú, potom ju rozrežeme na kocky s hranou 1 cm.

a Koľko bude malých kociek? 216

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

b Koľko z nich bude mať jednu žltú stenu? 96

$6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

c Koľko z nich bude mať dve žlté steny? 48

$12 \cdot 4 = 48$

d Koľko z nich bude mať tri žlté steny? 8

8 vrcholov

e Koľko z nich bude mať štyri žlté steny? 0

f Koľko z nich nebude mať ani jednu žltú stenu? 64

$216 - (96 + 48 + 8) = 64$

alebo $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Nakresli a vyfarbi si obrázok!



Úloha 12

Vyfarbujte alebo – ešte lepšie – doneste si kocky a zreálnite celú úlohu.



ovnajte

Porovnajte
i v triede svo
odhady!

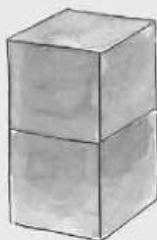
Predmet					
Mój odhad					
Susedov odhad					

[illegible]

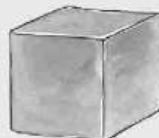


Délsky problém

PROJEKT



Kedysi dávno na ostrove Délos vypukol mor. Kráľ urobil to najlepšie, čo v tých časoch zvykli urobiť – vyslal poslov do Delf. Tam bola totiž preslávená veštiareň na čele s vešticou Pýtiou. Tá poslom prezradila, že mor na nich zoslať rozhnevaný boh Apolón. Mysleli si síce, že to od neho nie je fér, lebo Apolónovi postavili chrám s oltárom z čistého zlata, ktorý mal dokonalý, ba priam božský tvar kocky, ale v gréckych bohoch sa veru nebolo ľahké vyznať.



Pýtia im prezradila, že Apolón by chcel, aby jeho oltár zdvojnásobili. Čo mohli, chudáci, robili, zobrali zlato a oltár zdvojnásobili. Mor však pokračoval, nuž to Délosania reklamovali priamo u Apolóna. Ten sa však tváril dokonca urazene – množstvo zlata síce zdvojnásobili, ale porušili božský tvar jeho oltára.

Zabudni chvíľu na Apolónovo dohadovanie sa s Délosanmi a uvažuj, čo mohol Apolón chcieť.

1. Zdvojnásobiť všetky rozmery oltára?
2. Zdvojnásobiť povrch oltára?
3. Zdvojnásobiť objem oltára?

Skús vo všetkých troch prípadoch vypočítať čo najpresnejšie rozmery, objem a povrch nového oltára.

(Rada: hádaj, skúšaj, násob, del... a všetko znovu a znovu...)



Úloha 1

Povrch nového oltára by bol $24 \cdot a^2$ a jeho nový objem by bol $8 \cdot a^3$;

Úloha 2

Hrana kocky by mala mať rozmer $a \cdot \sqrt{2}$;

Úloha 3

Hrana kocky by mala mať rozmer $a \cdot \sqrt[3]{2}$. Od žiakov by sme očakávali približné, experimentálne získavané riešenia.

Úloha 2

Úloha dáva možnosť lepšie pochopiť univerzálnosť vyjadrenia veľkostí (počtu, množstva atď.) pomocou pomeru.

Úloha 3

V podstate krátime a rozširujeme pomer – užitočné cvičenie. Prídu vaši žiaci na to, koľko má táto úloha riešení?

5 Pomer. Priama a nepriama úmernosť

Pomer

1 Zapiš, v akom pomere sú v tvojej triede:

a dievčatá
k chlapcom,

b chlapci
k dievčatám,

c dievčatá
ku všetkým žiakom,

d chlapci
ku všetkým žiakom.

2 a Narysuj dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 4 : 6.

$$|AB| = 2 \text{ cm}$$

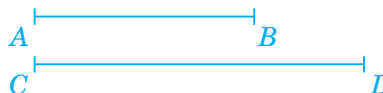
$$|CD| = 3 \text{ cm}$$



b Narysuj dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 4 : 6, ale s inými dĺžkami ako v zadaní a).

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

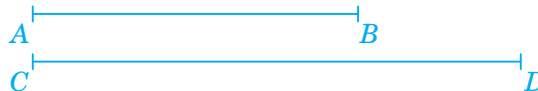
$$|CD| = 6 \text{ cm}$$



c Narysuj dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 4 : 6, ale s inými dĺžkami ako v zadaní a), b).

$$|AB| = 6 \text{ cm}$$

$$|CD| = 9 \text{ cm}$$



3 Nakresli zelené, červené a modré krúžky tak, aby boli v pomere 3 : 5 : 6 a ich počet bol väčší ako 14.

$$Z = 6 \quad \text{alebo} \quad Z = 9 \quad \text{alebo} \quad Z = 12$$

$$\check{C} = 10 \quad \check{C} = 15 \quad \check{C} = 20$$

$$M = 12 \quad M = 18 \quad M = 24$$





4 Zostroj bod C tak, aby platil vyznačený pomer $|AB| : |AC|$.

a $1 : 3$ $|AC| = 13,5 \text{ cm}$

b $2 : 4$ $|AC| = 8 \text{ cm}$

c $3 : 2$ $|AC| = 4 \text{ cm}$

d $5 : 4$ $|AC| = 6 \text{ cm}$

5 Doplň tabuľku.

$ AB : BC $	3 : 5	4 : 3	2 : 5	3 : 4	2 : 1
$ AB $	15 cm	12 cm	4 cm	6 cm	10 cm
$ BC $	25 cm	9 cm	10 cm	8 cm	5 cm
$ AC $	40 cm	21 cm	14 cm	14 cm	15 cm



6 Porovnaj dĺžky úsečiek.

a $|AB| : |BC| = 3 : 5$ $|AB| < |BC|$ c $|AB| : |BC| = 3 : 3$ $|AB| = |BC|$

b $|AB| : |BC| = 6 : 4$ $|AB| > |BC|$ d $|AB| : |BC| = 0,5 : 2$ $|AB| < |BC|$

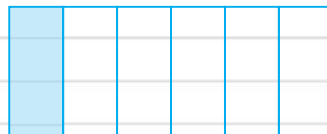


7 Betón sa mieša z cementu a štrku v pomere 1 : 5. Vysvetli.

a Čoho je viac? štrku

cement

b O koľko? o 4 diely



c Kolkokrát? 5-krát

štrk

Úloha 5

Ako by sa zmenili čísla v tabuľke, keby sme vymenili poradie bodov A, B, C ? Diskutujte o tom so žiakmi. V úlohe implicitne predpokladáme, že body A, B, C ležia na priamke. Ako by sa zmenila situácia, keby neležali?

Úloha 6

Zmeňte poradie bodov A, B, C a potom znovu porovnajte dĺžky jednotlivých úsečiek.

Úloha 7

Dobrý obrázok nič nepokazí, skôr naopak. Otázka: Čo v praxi znamená „o 4 diely viac“?



Úloha 11

Úloha nadväzuje na predchádzajúce cvičenia zo s. 18 a 19, tu však už pracujeme so samotnými pomermi. Ak by to niektorým žiakom robilo problém, vráťte sa napríklad k počtu vecí.

8 Sú dané postupné pomery. Z každého vytvor a napíš aspoň dva jednoduché pomery.

- a $3:5:7$ $3:5$ $3:7$ d $25:13:5$ $25:13$ $25:5$
 $5:7$ $13:5$
- b $1:12:24$ $1:12$ $1:24$ e $17:9:4$ $17:9$ $17:4$
 $12:24$ $9:4$
- c $6:12:16$ $6:12$ $6:16$ f $50:30:20$ $50:30$ $50:20$
 $12:16$ $30:20$

9 Urob z daných čísel všetky možné pomery. Aj postupné.



- $2:4$ $4:2$ $12:2$ $8:2$
 $2:12$ $4:8$ $12:4$ $8:4$
 $2:8$ $4:12$ $12:8$ $8:12$

10 K danému pomeru napíš prevrátený pomer.

- a $1:10$ c $5:3$ e $8:3$ g $16:80$
 $10:1$ $3:5$ $3:8$ $80:16$
- b $2:7$ d $50:20$ f $3:10$ h $117:54$
 $7:2$ $20:50$ $10:3$ $54:117$

11 Každý z pomerov zapíš piatimi rôznymi spôsobmi. Jeden z nich nech je jeho základný tvar.

- a $18:6 = 3:1 = 6:2 = 9:3 = 12:4 = 15:5$
 b $3:7 = 6:14 = 9:21 = 12:28 = 15:35 = 18:42$
 c $4:12 = 1:3 = 2:6 = 3:9 = 4:12 = 5:15$
 d $1,5:5 = 15:50 = 3:10 = 6:20 = 9:30 = 12:40$
 e $10:2 = 5:1 = 15:3 = 20:4 = 25:5 = 30:6$

Základný tvar vyznač farebne.



12 Doplň. Zakrúžkuj pomer v základnom tvare.

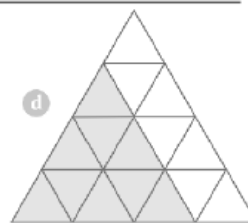
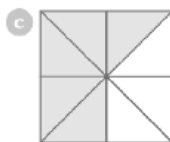
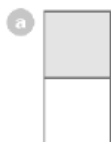
a) $5 : 2 = 10 : 4 = 15 : 6 = 17,5 : 7 = 40 : 16 =$

b) $2 : 4 = 6 : 12 = 1 : 2 = 17 : 34 = 9 : 18 =$

c) $8 : 4 = 12 : 6 = 6 : 3 = 10 : 5 =$

d) $5 : 3 = 10 : 6 = 15 : 9 =$

13 Ku každému obrázku doplň: **A)** v akom pomere je vyfarbená časť a celok, **B)** akú časť celku tvorí vyfarbená časť.



A: $1 : 2$

A: $3 : 4$

A: $5 : 8$

A: $9 : 16$

B: $\frac{1}{2}$

B: $\frac{3}{4}$

B: $\frac{5}{8}$

B: $\frac{9}{16}$

14 Vysvetli: Platy sa zvýšili v pomere 4 : 3.

a) O koľko sa zvýšili platy? pôvodný
o $\frac{1}{3}$ zvýšený

b) Koľkokrát sa zvýšili platy?
 $\frac{4}{3}$ - krát

15 Vyjadri pomerom.

a) V škole je 200 chlapcov a 300 dievčat. $Ch : D = 2 : 3$

b) Počet zjedených čokolád sa na Mikuláša zvýši na trojnásobok. $V : M = 1 : 3$

c) Cez prázdniny sa počet cestujúcich autobusmi znížil na štvrtinu. $P : š = 1 : 4$

16 Leopard a gazela dosahujú rýchlosť 100 km/h. Zajac dosahuje na krátke vzdialenosti rýchlosť 25 km/h a lastovička dokáže letieť rýchlosťou 65 m/s. Poštový holub preletí za sekundu 65 metrov. Porovnaj pomerom rýchlosti:

a) leoparda a zajaca, b) lastovičky a holuba, c) holuba a gazely, d) leoparda a gazely.

$L : Z = 4 : 1$

$L : H = 1 : 1$

$H : G = 324 : 100$

$L : G = 1 : 1$

Úloha 13

Úloha ukazuje peknú súvislosť medzi zlomkami a pomerom. Žiaľ, táto matematická kráska často ostáva pre žiakov utajená, aj keď pri riešení úloh je veľmi prospešná. Preto sa tejto úlohe oplatí venovať dostatočne veľa času.

Úloha 14

Pomer je opäť jedna z tém, kde by sme pri riešení úloh mali žiakov nabádať najmä kresliť, znázorňovať si situácie. Dobře nakreslený obrázok často ponúkne okamžitú odpoveď na položenú otázku.

Úloha 16

Zapíšte si aj slovnú interpretáciu každého pomeru.

Úloha 19

Vráťte sa k úlohe 13 na strane 21.

Úloha 20

Aj tu môže vášim žiakom pomôcť návrat k zlomkom a pomeru v úlohe 13 na strane 21.

Úloha 21

A čo nevyfarbené pomery?

17 Porovnaj pomerom.

a 1 dm a 1 m $1 : 10$

b 125 m a 1 km $1 : 8$

c 10 cm a 2,5 m $1 : 25$

d 1 kg a 1 g $1\,000 : 1$

e 50 kg a 0,1 t $1 : 2$

f $\frac{1}{2}$ kg a 25 dag $2 : 1$

g 12 min a 1 h $1 : 5$

h 3 ha a 30 a $10 : 1$

18 Každé číslo rozdeľ na dva sčítance v danom pomere.

a $1 : 3$ $52 = 13 + 39$ $1 + 3 = 4, 52 : 4 = 13, 13 \cdot 3 = 39$

b $36 : 6$ $140 = 120 + 20$

c $12 : 13$ $100 = 48 + 52$

d $60 : 15$ $15 = 12 + 9$

19 Zväčši dané čísla.

a 9 v pomere $4 : 1$ $9 \cdot \frac{4}{1} = 36$

b 24 v pomere $5 : 2$ $24 \cdot \frac{5}{2} = 60$

c 455 v pomere $20 : 14$ $455 \cdot \frac{20}{14} = 650$

d 148 v pomere $13 : 4$ $148 \cdot \frac{13}{4} = 481$

20 Zmenši dané čísla.

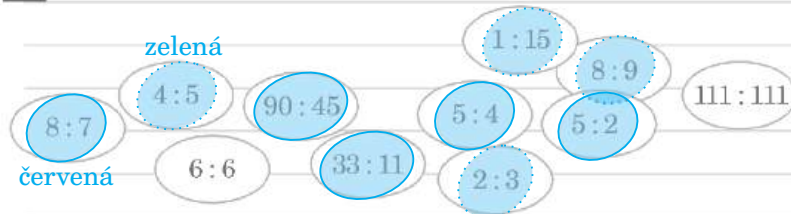
a 50 v pomere $1 : 2$ $50 \cdot \frac{1}{2} = 25$

b 111 v pomere $2 : 3$ $111 \cdot \frac{2}{3} = 74$

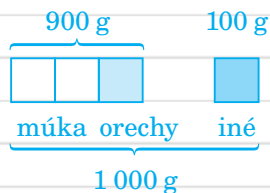
c 70 v pomere $10 : 50$ $70 \cdot \frac{10}{50} = 14$

d 560 v pomere $3 : 8$ $560 \cdot \frac{3}{8} = 210$

21 Pomery, ktoré dané číslo zväčšia, vyfarbi červenou. Pomery, ktoré dané číslo zmenšia, vyfarbi zelenou.



- 22** Cesto na orechové guľky okrem iného obsahuje dve základné suroviny – múku a orechy v pomere 2 : 1. Koľko múky a koľko orechov treba na 1 kg cesta, ak „iné“ je 100 g?



2 diely múka

1 diel orechy

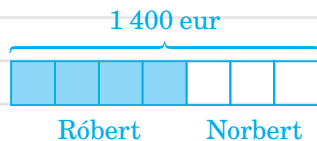
3 diely ... 900 g

1 diel 300 g ... orechy

2 diely ... 600 g ... múka

sk.: spolu $300 + 600 + 100 = 1\,000\text{ g}$

- 23** Pán Róbert a pán Norbert si spoločne zarobili 1 400 eur. Odmenu si rozdelili v pomere 4 : 3 podľa toho, ako pracovali. Koľko dostal každý z nich?



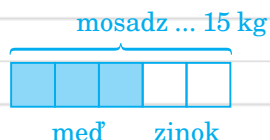
$$1\,400 : 7 = 200$$

$$200 \cdot 4 = 800\text{ eur ... Róbert}$$

$$200 \cdot 3 = 600\text{ eur ... Norbert}$$

$$\text{sk.: spolu } 800 + 600 = 1\,400$$

- 24** Mosadz je zliatina medi a zinku v pomere 3 : 2. Koľko medi a zinku potrebuje sochár na výrobu mosadznej sochy, ktorej hmotnosť má byť 15 kg?



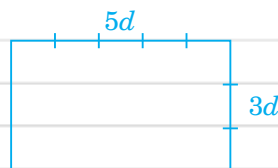
$$15 : 5 = 3$$

$$3 \cdot 3 = 9\text{ kg ... meď}$$

$$3 \cdot 2 = 6\text{ kg ... zinok}$$

$$\text{sk.: } 9 + 6 = 15$$

- 25** Strany obdĺžnika sú v pomere 3 : 5. Aké sú ich dĺžky, ak obvod obdĺžnika je 25,6 cm?



$$o = 2(5d + 3d) = 16d$$

$$25,6 = 16d$$

$$d = 1,6\text{ cm}$$

$$5d = 8\text{ cm } a$$

$$3d = 4,8\text{ cm ... } b$$

$$\text{sk.: } 2(8 + 4,8) = 25,6$$

Kreslíme, kreslíme, kreslíme...
A potom trochu počítame.

Úloha 25

Myšlienka používania „dielov“ pri riešení úloh tohto typu je zatiaľ pre niektorých žiakov ukrytá a vzdialená. Možno by im ju pomohol objaviť návrat k úlohe 2 na strane 18.



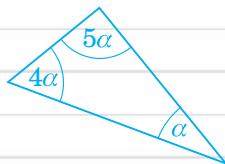
Úloha 28

Riešenie rovnice $d^2 = 1$ urobte úvahou. („Ktoré číslo, keď ho vynásobíme samé sebou, dá výsledok 1?“)

Úloha 29

Ide o kosoštvorec s rovnakým pomerom výšky a strany ako v predchádzajúcom príklade, iba dĺžky strán sú dvojnásobné. Porovnajte pomerom ich obvody ($20 : 40 = 1 : 2$) a ich obsahy ($20 : 80 = 1 : 4$). Tejto problematike sa ešte budeme niekoľkými príkladmi venovať – tu môžete začať otázkou: Keď je pomer obvodov $1 : 2$, potom pomer obsahov je $1 : 4 = 1 : 2^2$?

26 Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka sú v pomere $1 : 4 : 5$. Aké veľké sú uhly trojuholníka?



$$\alpha + 4\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 18^\circ$$

$$\beta = 4\alpha = 72^\circ$$

$$\gamma = 5\alpha = 90^\circ$$

$$\text{sk.: } 18 + 72 + 90 = 180$$

27 Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka sú v pomere $3 : 4 : 5$.



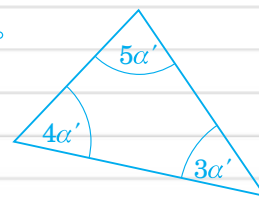
$$3\alpha' + 4\alpha' + 5\alpha' = 180^\circ$$

$$\alpha' = 15^\circ$$

$$\alpha = 3\alpha' = 45^\circ$$

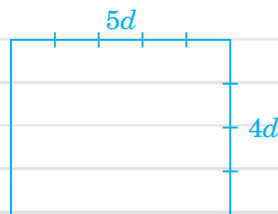
$$\beta = 4\alpha' = 60^\circ$$

$$\gamma = 5\alpha' = 75^\circ$$



Trojuholník je ~~pravoúhlý~~ - ~~rovnostanný~~ - ~~tupoúhlý~~ - ostrouhlý

28 Pomer dĺžok strán obdĺžnika je $4 : 5$ a jeho obsah má veľkosť 20 cm^2 . Aký je jeho obvod?



$$20 = 5d \cdot 4d$$

$$d = 1 \text{ cm}$$

$$a = 5d = 5 \text{ cm}$$

$$b = 4d = 4 \text{ cm}$$

$$o = 18 \text{ cm}$$



29 Pomer dĺžok strán trojuholníka je $1 : 3 : 5$ a jeho obvod je 45 cm . Aké sú dĺžky strán trojuholníka?

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$45 : 9 = 5$$

$$a = 1 \cdot 5 = 5 \text{ cm}$$

$$b = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}$$

$$c = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}$$

$$\text{sk.: } 5 + 15 + 25 = 45$$



- 30** Katka, Danka a Janka si zarobili a chceli si rozdeliť 130 eur tak, aby časti Katky a Danky boli v pomere 3 : 2 a časti Katky a Janky v pomere 2 : 1. Koľko má ktorá dostať?



- 31** Hodil som našim trom sliepkam za hrsť zrna a všimol som si, že ho vyzobali v pomere 8 : 7 : 6, pričom dve z nich si uchmatli 156 zrn. Koľko zrn vybojovala ktorá sliepka?



$8 + 7 = 15$ dielov	$156 : 15 = 10,4$	✗
$8 + 6 = 14$ dielov	$156 : 14 = 11,14$	✗
$7 + 6 = 13$ dielov	$156 : 13 = 12$	✓
Prvá ... $8 \cdot 12 = 96$	druhá ... $7 \cdot 12 = 84$	tretia ... $6 \cdot 12 = 72$
sk.: $84 + 72 = 156$		

- 32** Traja kamaráti mali na začiatku hry guľôčky v pomere 2 : 7 : 4. Mohli mať na konci hry rovnaký počet guľôčok?



Začiatok hry	$2d : 7d : 4d$
	spolu $13d$
$13d$ sa dá rozdeliť na tri rovnaké časti ak d je násobok 3.	
napr.: $d = 6$	začiatok $12 : 42 : 24$
	koniec $26 : 26 : 26$

- 33** Kráľ rozdelil dedičstvo svojim trom synom v pomere 7 : 6 : 4. Dvaja z nich dostali spolu 286 000 zlatých. Koľko dostal každý zo synov?



Nájdí všetky riešenia!

$7 + 6 = 13$	$286\ 000 : 13 = 22\ 000$
	P = 154 000 D = 132 000 T = 88 000
$7 + 4 = 11$	$286\ 000 : 11 = 26\ 000$
	P = 182 000 D = 156 000 T = 104 000
$6 + 4 = 10$	$286\ 000 : 10 = 28\ 600$
	P = 200 200 D = 171 600 T = 114 000

Úloha 30

Pri kreslení obrázka sme celé dieliky v pomere Katky a Danky (3 : 2) neskôr rozdelili na polovicu, aby sme mohli dobre porovnať Katku a Janku.

Úloha 31

Problém je uvedomiť si, že musíme vyberať z niekoľkých možností – určiť dvojicu sliepok tak, aby sa medzi ne dalo bez zvyšku v danom pomere rozdeliť 156 zrn.

Úloha 32

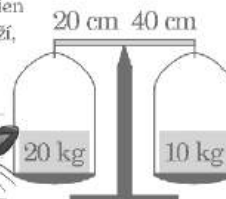
Pri hre nepribúdajú počas hry nové guľôčky, iba menia majiteľov. To, že súčet dielov v pomere je 13, veľmi rýchlo zvädza na vyslovenie úvahy, že na konci hry nemohli mať rovnaký počet guľôčok. Ak žiaci prezentujú takéto riešenie, povedzte im konkrétny počet, kedy sa to dá (napríklad 12, 42 a 24 guľôčok) a nechajte ich uvažovať ďalej.

Úloha 33

Úloha je netypická (ťažšia) pre žiakov tým, že treba nájsť všetky riešenia. Použijeme tie isté úvahy ako v úlohe 30. Skúste spolu so žiakmi ešte pred riešením zistiť, ktorá z možností je pre synov najvýhodnejšia (t. j., keď vyberieme takú dvojicu synov, ktorej súčet dielov je najmenší, pretože vtedy delíme na malý počet dielov a na jeden diel pripadne väčšia suma peňazí).

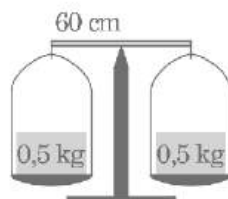


- 34** Aby bola páka v rovnováhe, musia byť dĺžky ramien v opačnom pomere ako je pomer hmotností závaží, ktoré sú na týchto ramenách zavesené. Doplň údaje na obrázkoch.



$$20 \text{ cm} : 40 \text{ cm} = 1 : 2$$

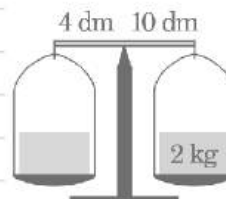
$$20 \text{ kg} : 10 \text{ kg} = 2 : 1$$



$$0,5 : 0,5 = 1 : 1$$

$$60 : \square = 1 : 1$$

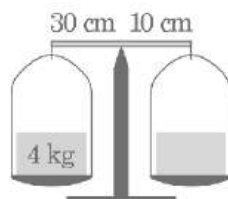
$$\square = 60 \text{ cm}$$



$$4 \cdot 10 = 2 : 5$$

$$\square : 2 = 5 : 2$$

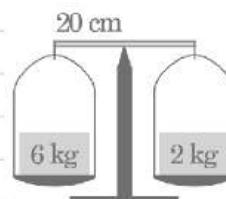
$$\square = 5 \text{ kg}$$



$$30 : 10 = 3 : 1$$

$$4 : \square = 1 : 3$$

$$\square = 12 \text{ kg}$$



$$6 : 2 = 3 : 1$$

$$20 : \square = 1 : 3$$

$$\square = 60 \text{ cm}$$

- 35** Bronz je zliatina cínu a medi v pomere 1 : 4. Koľko medi obsahuje bronzový šperk vážiaci 25 gramov?

$$25 : 5 = 5$$

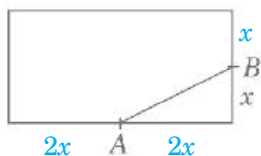
$$4 \cdot 5 = 20 \text{ g}$$

Šperk obsahuje 20 g medi.

- 36** Úsečku dlhú 9 cm rozdeľ v pomere 2 : 3 : 4. Narysuj.



- 37** Obdĺžnik má strany v pomere 2 : 1. Úsečka AB je spojnicou stredov strán obdĺžnika. Vyjadri obsah a obvod obdĺžnika pomocou x .



$$\begin{aligned} a &= 4x \\ b &= 2x \\ o &= 2(4x + 2x) = 12x \\ S &= 4x \cdot 2x = 8x^2 \end{aligned}$$



- 38** Baltazár zostrojil perpetuum mobile. Veľké koleso sa za 2 minúty a 20 sekúnd otočilo 420-krát. Malé koleso sa začalo otáčať o 35 sekúnd neskôršie a stihlo sa otočiť 262,5-krát. Potom sa, žiaľ, perpetuum mobile zastavilo. Zisti napriek tomu pomer otáčok oboch kolies za jednotku času.

Veľké ... 140 s 420-krát

1 s 3-krát

malé ... 105 s ... 262,5-krát

1 s 2,5-krát

$$M : V = 2,5 : 3 = 25 : 30 = 5 : 6$$



- 39** Vypočítaj x v nasledujúcich úmerách.

a $x : 7 = 6 : 4$

$$x = \frac{6}{4} \cdot 7$$

$$x = \frac{42}{4}$$

$$x = 10,5$$

b $x : 2,5 = 14 : 8$

$$x = \frac{35}{8}$$

c $6 : x = 24 : 5$

$$x = \frac{5}{4}$$

d $\frac{1}{2} : x = 5 : \frac{3}{4}$

$$x = \frac{3}{40}$$

e $6 : 5 = x : 0,4$

$$x = 0,48$$

f $4 : 0,3 = x : \frac{2}{3}$

$$x = \frac{80}{9}$$

g $4 : 3 = 8 : x$

$$x = 6$$

h $7 : 9 = 2 : x$

$$x = \frac{18}{7}$$

Úloha 37

Žiaci mocniny ešte nepreberali, ak by bol problém zapísať $x \cdot x$ v tvare x^2 , nechajte obsah zapísaný v tvare $8 \cdot x \cdot x$.



Mierka

1 Aká je skutočná dĺžka cesty, ktorá na mape meria 5 cm, ak mierka mapy je:

a 1 : 500,

b 1 : 1 000,

c 1 : 1 000 000?

$$500 \cdot 5 =$$

$$= 2\,500 \text{ cm} =$$

$$= 25 \text{ m}$$

$$1\,000 \cdot 5 =$$

$$= 5\,000 \text{ cm} =$$

$$= 50 \text{ m}$$

$$1\,000\,000 \cdot 5 =$$

$$= 5\,000\,000 \text{ cm} =$$

$$= 50 \text{ km}$$

2 Aká je šírka súčiastky na výkrese, ak v skutočnosti meria 25 cm a mierka výkresu je:

a 1 : 25,

b 1 : 100,

c 1 : 5 000?

$$25 : 25 = 1 \text{ cm}$$

$$25 : 100 = 0,25 \text{ cm} =$$

$$= 2,5 \text{ mm}$$

$$25 : 5\,000 = 0,005 \text{ cm} =$$

$$= 0,05 \text{ mm}$$

3 Aká je mierka mapy, ak:

a 10 km úsek znázorníme úsečkou dlhou 10 cm,

$$10 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ cm}$$

$$10 : 1\,000\,000 = 1 : 100\,000$$

b 5 000 m úsek znázorníme úsečkou dlhou 2 cm,

$$5\,000 \text{ m} = 500\,000 \text{ cm}$$

$$2 : 500\,000 = 1 : 250\,000$$

c 25 m úsek znázorníme úsečkou dlhou 0,5 cm?

$$25 \text{ m} = 25\,000 \text{ mm} \quad 0,5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}$$

$$5 : 25\,000 = 1 : 5\,000$$

4 Aká je mierka mapy, ak úsečka dlhá 2,5 cm predstavuje 500 km?

$$500 \text{ km} = 500\,000\,000 \text{ mm}$$

$$2,5 \text{ cm} = 25 \text{ mm}$$

$$25 : 500\,000\,000 = 1 : 20\,000\,000$$

5 Dĺžka ulice je 230 m. Aká bude dĺžka jej obrazu na pláne v mierke 1 : 2 500?

$$230 : 2\,500 = 0,092 \text{ m} = 9,2 \text{ cm}$$





- 6** Záhrada je nakreslená v mierke 1 : 200.
V akom pomere je skutočná plocha záhrady a plocha jej obrazu?

Skutočnosť	mapa	pomer
$a = 200 \text{ m}$	$a' = 1 \text{ m}$	$S' : S = 0,5 : 20\,000$
$b = 100 \text{ m}$	$b' = 0,5 \text{ m}$	$= 1 : 40\,000$
$S = 20\,000 \text{ m}^2$	$S' = 0,5 \text{ m}^2$	$40\,000 = 200^2$



- 7** Model telesa je zhotovený v mierke 1 : 50.
Kolkokrát menší je objem modelu ako objem skutočného telesa?

Model	skutočnosť	pomer
a, b, c	$a' = 50 a$	$V : V' = 1 : 125\,000$
$V = abc$	$b' = 50 b$	
	$c' = 50 c$	$125\,000 = 50^3$
	$V' = 125\,000 V$	



- 8** Pozoruj mapu.

- a** Vypočítaj skutočnú dĺžku prevozu medzi Mrenou a Novou Mrenou. **5,1 km**

- b** Dokresli do mapy mesto, ktoré by ležalo na ceste a od Mreny by bolo vzdialené 15 km.
c Letný tábor by nemal byť od Nového hradu ďalej ako 7,5 km. V okruhu 1 500 m od hradu je však rezervácia so zákazom stanovania. Narysuj, kde sa môže tábor postaviť.



Úloha 6 Úloha 7

Pre siedmakov má zmysel riešiť tieto úlohy len vo veľmi zjednodušenej podobe. Preto má záhrada tvar obdĺžnika a teleso tvar kvádra. Pracovať s premennou (naše riešenie v úlohe 7) pri týchto typoch úloh sa darí najmä lepším žiakom. Opäť si pripomeňte, že cesta k riešeniu vedie aj cez konkrétne čísla (ako naše riešenie v úlohe 6). Závisí od vás, či riešenie každej z úloh dotiahnete až k zovšeobecneniu (ak je pomer dĺžok $1 : a$, tak pomer obsahov je $1 : a^2$ a pomer objemov je $1 : a^3$).

Úloha 8

Pripravte si trasu výletu, vezmite mapu vášho okolia a riešte podobné úlohy. Celá práca môže opäť vyústiť do pekného projektu, napríklad s názvom Stavba hotela. Zadaťte podmienky, ktoré limitujú výstavbu hotela, a na rôznych mapách hľadajte ideálne lokality. Podmienkou môže byť napríklad dostupnosť od najbližšieho letiska, železničnej stanice, autobusovej zastávky, vzdialenosť od vodného zdroja, zdroja elektrickej energie, vzdialenosť od chránených lokalít, vzdialenosť od turistických atrakcií.



Aj keď uvádzame postupy riešenia, nemyslíme si, že sú vždy jediné možné. Našou snahou bolo ukázať, koľkými rôznymi spôsobmi sa môže každá z úloh vyriešiť (každá logicky správna cesta je dobrá, niet lepšej či horšej – môže byť iba práve rýchlejšia pre konkrétny typ úlohy, ale aj to závisí od riešiteľa). Veríme, že pri riešení jednotlivých úloh sa vo vašej triede objaví viac typov riešení a vy budete mať veľký priestor na diskusiu so žiakmi.

Priama úmernosť

- 1** Ak je váza tvaru valca naplnená vodou do výšky 35 cm, tak obsahuje 1 liter vody. Koľko vody bude obsahovať, ak ju naplníme do výšky 45 cm?

↑ 35 cm 1 l ↑
 ↑ 45 cm x l ↑

$$\frac{45}{35} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{9}{7} \text{ l}$$

Vo váze bude $\frac{9}{7}$ l vody.

- 2** Za 2,5 kg jabĺk otec zaplatil 5 eur. Koľko by zaplatil za 3 kg?

2,5 kg 5 eur

1 kg $5 : 2,5 = 2$ eurá

3 kg $2 \cdot 3 = 6$ eur

Za 3 kg by zaplatili 6 eur.

- 3** Jozefov dvojkrok meria 148 cm. Koľko dvojkrokov má urobiť, ak chce odhadnúť vzdialenosť 25 m?

$$2500 : 148 \approx 16,8 \text{ m}$$

Jozef by mal urobiť 17 dvojkrokov.

- 4** Z 2 kg jabĺk dostala mama 350 g sušených jabĺk. Koľko jabĺk musí usušiť na 1 kg sušených?

↑ 2 kg 350 g sušených ↑
 ↑ x kg 1 000 g sušených ↑

$$\frac{x}{2} = \frac{1000}{350}$$

$$x = \frac{40}{7} \text{ kg}$$

Potrebuje $\frac{40}{7}$ kg jabĺk.



5 Pekár urobí z 10 kg múky 12 kg cesta. Koľko múky potrebuje na 100 kg cesta?

$$10 : 12 = x : 100$$

Na 100 kg cesta potrebujeme $86\frac{1}{3}$ kg múky.

6 Strom vysoký 11 m vrhá tieň dlhý 9 m. Vedľa stojí veža, ktorá vrhá tieň dlhý 40 m. Aká vysoká je veža?

$$\frac{x}{11} = \frac{40}{9}$$

Veža je vysoká $48\frac{8}{9}$ m.

7 Za 2,5 kg jablák zaplatíš 6,25 eura, 2 kg hrušiek stojí 6 eur. Čo je lacnejšie?

jablká 1 kg 2,5 eura

hrušky 1 kg 3 eurá

Lacnejšie sú jablká.

8 V septembri bola Soňa v škole 19-krát a prešla cestou do školy 22 800 metrov. Koľko metrov prešla Dorotka, ktorá má do školy rovnako ďaleko, ale bola 3 dni chorá?

$$x = \frac{22\,800}{19} \cdot 16$$

Dorota prešla 19 200 m.



Úloha 6

Veľmi dobrá metóda na určovanie výšky objektov v priestore. Vyjdite so žiakmi na školský dvor, zmerajte dĺžku tieňa palice s dĺžkou 1 meter, potom dĺžku tieňa konkrétneho objektu a výsledky máte raz-dva. Z tejto nenápadnej úlohy sa dá tiež vyjsť do projektu, ktorého zadáním by okrem spracovania výsledkov meraní na školskom dvore bolo hľadanie ďalších možností, ako sa dá zmerať výška objektu v priestore. Žiaci rýchlo pochopia, že tieň skutočných budov a stromov majú rôzne tvary a nie je úplne jasné, odkiaľ treba merať. Matematika v zošite nie vždy zodpovedá matematike reálneho sveta.



Úloha 9

Pripomíname percentá. Veľmi zjednodušene ukazujeme žiakom, že časť nášho zárobku dávame štátu vo forme daní. Diskutujte s nimi, prečo je to tak a na čo štát použije naše dane. Je načase, aby sme prestali veriť, že napríklad školstvo je v tomto štáte zadarmo. Všetci si zaň platíme – nepriamo prostredníctvom daní (a celý život).

Úloha 10 Úloha 11

Pri riešení sme nepoužili trojčlenku, ale „zdravý sedliacky rozum“.

Úloha 12

Pri zostavovaní tejto úlohy nás inšpirovala skutočná propagačná jazda, ktorú zorganizovala v Českej republike istá automobilka pri otváraní svojho nového závodu. Diskutujte so žiakmi o tom, asi akou rýchlosťou mohli autá ísť, aby to pre všetkých vodičov bolo bezpečné (vzhľadom na malú vzdialenosť medzi vozidlami).

- 9** Pracovníčka expedície balí vianočné ozdoby z ručne fúkaného skla do papierových škatúľ. Za naplnenie 10 škatúľ zarobí 30 eur. Koľko zarobila počas včerajšej zmeny, ak naplnila 19 škatúľ? Aká bola jej čistá mzda, ak dane tvoria 19 % jej zárobku?

$$\begin{array}{l} \uparrow 10 \text{ škatúľ} \dots\dots\dots 30 \text{ eur} \uparrow \\ \uparrow 19 \text{ škatúľ} \dots\dots\dots x \text{ eur} \uparrow \end{array} \quad \frac{x}{30} = \frac{19}{10}$$

$$x = 57$$

100 % ... 57 eur; 19 % ... 10,83 eura; čistá mzda ... 46,17 eura
Včera zarobila 57 eur, čistá mzda bola 46,17 eura.

- 10** Päť priemerne veľkých pomarančov má hmotnosť 1 kg. Koľko kíl pomarančov kúpili do školskej jedálne pre 235 žiakov?

$$\begin{array}{l} \cdot 47 \mid 5 \text{ pomarančov} \dots\dots\dots 1 \text{ kg} \mid \cdot 47 \\ \downarrow 235 \text{ pomarančov} \dots\dots\dots x \text{ kg} \downarrow \end{array}$$

Do školskej jedálne kúpili 47 kg pomarančov.

- 11** Z 1,5 tony starého papiera sa vyrobí toľko recyklovaného papiera ako z 10 stromov. Koľko papiera musia vyzbierať žiaci základnej školy, aby zachránili 100 stromov pred výrubom?

$$\begin{array}{l} \cdot 10 \mid 1,5 \text{ t} \dots\dots\dots 10 \text{ stromov} \mid \cdot 10 \\ \downarrow x \text{ t} \dots\dots\dots 100 \text{ stromov} \downarrow \end{array}$$

$$10 \cdot 1,5 = 15$$

Žiaci musia vyzbierať 12 ton starého papiera.

- 12** Pri otvorení nového závodu na výrobu automobilov urobili majitelia propagačnú jazdu 100 vozidiel, ktoré sa budú vyrábať v tomto závode. Aká dlhá bola kolóna áut, ak jedno auto meria 450 cm a vzdialenosť medzi vozidlami bola meter?

$$\begin{array}{ll} 100 \text{ áut} & 100 \cdot 450 = 45\,000 \text{ cm} = 450 \text{ m} \\ 99 \text{ medzier} & 99 \cdot 1 = 99 \text{ m} \\ \text{spolu} & 549 \text{ m} \end{array}$$

Kolóna áut mala dĺžku 549 m.



13 Jakubovi rodičia zaplatili za 20 februárových obedov v školskej jedálni 20,60 eura.

Kolko zaplatili za 23 marcových obedov?

Kolko peňazí vrátili rodičom v apríli, ak bol Jakub v marci 2 týždne chorý?

20 obedov 20,60 eura

1 obed 1,03 eura

23 obedov 23,69 eura

10 obedov 10,3 eura

Za marcové obedy zaplatili 23,96 eura. V apríli im vrátili 10,30 eura.

14 Maľko so starými rodičmi nazbierali 3 kg húb. Po vysušení z nich získali 0,45 kg sušených húb.

Kolko húb ešte musia nazbierať, aby mali 5 kg sušených húb?

Kolko by získali ich predajom, ak sa jeden kilogram sušených húb predáva po 48,56 eura?

↑ 3 kg čerstvých 0,45 kg ↑

↑ x kg čerstvých 5 kg ↑

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{0,45}$$

$$x = 33\frac{1}{3}$$

Ešte musia nazbierať $30\frac{1}{3}$ kg húb.

$$33\frac{1}{3} - 3 = 30\frac{1}{3}$$

Predajom by získali 242,80 eura.

$$5 \cdot 48,50 = 242,80$$

15 Liter benzínu stojí 1,516 eura. Priemerná spotreba auta KOLO 150

je 6,9 l na 100 km. Auto má 40-litrovú nádrž. Kolko zaplatí majiteľ auta

za cestu zo Žiliny do Prahy a späť, ak pôjde po trase dlhšej 413 km?

↑ 100 km 6,9 l ↑

↑ 413 km x l ↑

$$\frac{x}{6,9} = \frac{413}{100}$$

$$28,497 \cdot 1,516 \div 43,20$$

$$x = 28,497$$

Majiteľ zaplatí 43,20 eura.

16 Vypočítaj.



a $(3,89 - \frac{3}{5}) - (\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}) \cdot 0,2 = 2,64$

b $(2,14 - 1\frac{3}{4}) : 0,5 - \frac{3}{16} : \frac{1}{4} = 0,03$

Úloha 13

Obedy v školskej jedálni síce nestoja až tak veľa, ale koľkokrát vaši žiaci nejdú na obed a neodhlásia ho. Spočítajte, koľko by ušetrili, keby tak urobili.

Mimochodom – koľko stoja obedy vo vašej školskej jedálni? Vedia vaši žiaci, koľko by stálo, keby to isté zjedli v reštaurácii?

Úloha 15

Cestujte aj inam. Vymyslite si so žiakmi cestu Spoznaj Slovensko, naplánujte, čo na nej chcete vidieť, a vypočítajte, koľko by vás stálo cestovanie autom.



Úloha 17

Úloha 18

Separujete vo vašej obci odpad?
A čo vaša škola? Koľko sa vo vašej obci platí za odvoz a likvidáciu odpadu? Kam sa odpad odváža a kde a ako sa likviduje? Vedia to vaši žiaci? Prečo je výhodné a nevyhnutné separovať odpad? Ako to robili naši predkovia? To je iba malá ukážka námetov, ktoré vám ponúkajú tieto dve úlohy.

Úloha 19

Keby sa do predajnej ceny obleku započítala iba cena látky, z ktorej je zhotovený, stál by $3,5 \cdot 22,15 = 77,525$ eura. Prečo stojí oblek viac? Vedia vaši žiaci čo všetko ovplyvňuje ceny tovarov, ktoré kupujeme v obchode? Takéto a podobné námety nájdete aj v pracovnom zošite *Praktické financie*.

- 17** 14 % separovaného odpadu na Slovensku v roku 2007 tvorili plasty. Skla sa podarilo vyseparovať dvakrát viac. Koľko percent separovaného odpadu tvorilo sklo? Koľko percent separovaného odpadu tvoril ostatný odpad?

plasty 14 %

sklo 2-krát viac

$$2 \cdot 14 = 28 \quad 28 + 14 = 42 \quad 100 - 42 = 58$$

Sklo tvorilo 28 % separovaného odpadu.

Ostatný odpad tvoril 58 %.

- 18** Obyvatelia rodinného domu naplnia za týždeň 120-litrovú plastovú nádobu na odpad. Koľko odpadu vyprodukuje za rok? Koľko zaplatia ročne za jeho odvoz, ak im smetie vyvážajú raz týždenne a jeden odvoz stojí 3,32 eura?

1 týždeň 120 l 3,32 eura

52 týždňov 6 240 l 172,64 eura

Za rok vyprodukovali 6 240 l odpadov.

Za jeho odvoz zaplatia 172,64 eura.

Rok má
52 týždňov.



- 19** Na ušitie jedného obleku sa spotrebuje $3,5 \text{ m}^2$ látky. Koľko m^2 látky musí nakúpiť odevný závod na ušitie 1 000 oblekov? Aké sú náklady na kúpu potrebného množstva látky, ak 1 m^2 stojí 22,15 eura?

1 oblek $3,5 \text{ m}^2$

1 m^2 22,15 eura

1 000 oblekov $3 500 \text{ m}^2$

$3 500 \text{ m}^2$ 77 525 eura

Odevný závod musí kúpiť $3 500 \text{ m}^2$ látky.

Zaplatí za ňu 77 525 eur.

- 20** V pondelok chýbali v triede traja žiaci, čo je 12 % celkového počtu žiakov. Koľko žiakov chýbalo v stredu, ak na vyučovaní bolo 84 % všetkých žiakov?

↑ 3 žiaci 12 % ↑

↑ x žiakov $100 - 84 = 16$ % ↑

$$\frac{x}{3} = \frac{16}{12}$$

$$x = 4$$

V stredu chýbali 4 žiaci.



Nepriama úmernosť

- 1 Róbert prečítal z knihy 8 strán denne a prečítal ju za 15 dní.
Za koľko dní ju prečíta, ak bude denne čítať po 6 strán?

↓ 8 denne 15 dní ↑
↓ 6 denne x dní

$$\frac{x}{15} = \frac{8}{6}$$

Prečíta ju za 20 dní.

$$x = 20 \text{ dní}$$

- 2 Róza si vypočítala, že ak prečíta denne 10 strán, celú knihu prečíta za 18 dní. Po týždni sa však rozhodla, že denne prečíta o jednu stranu viac. Za koľko dní prečíta celú knihu?

Denne 10 strán kniha 180 strán

po týždni prečítala 70 strán

ostalo 110 strán

denne 11 strán 10 dní

celá kniha 17 dní

- 3 Vodič prešiel vzdialenosť medzi dvoma mestami za 2 hodiny priemernou rýchlosťou 75 km/h. Ako musí zmeniť rýchlosť, aby cestu prešiel o 20 minút rýchlejšie?

a) $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 2 h 150 km
 $2 \text{ h} - 20 \text{ min} = \frac{5}{3} \text{ hod}$
 $150 \text{ km} \dots \frac{5}{3} \text{ hod} \dots 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) ↑ $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 2 hod ↓
 $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\frac{5}{3} \text{ hod}$
 $x = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- 4 Plnú vaňu vody vypustím za 4 minúty. Koľko by trvalo jej vypustenie, keby na nej pribudli ešte dva rovnaké odtokové otvory?

Vypustenie by bolo 3-krát rýchlejšie – $\frac{4}{3}$ minúty.

Úloha 3

Jedno z riešení sa približuje fyzike, druhé používa nepriamu úmernosť. A tu by nás naozaj zaujímala frekvencia jednotlivých riešení. Trúfli by ste si ju odhadnúť pred hodinou?

Úloha 4

Na vyriešenie stačí jednoduchá úvaha – ako to vidia vaši žiaci?



Úloha 6 Úloha 7 Úloha 8

Aj pri riešení úloh na zloženú úmeru môžu vaši žiaci prísť s rôznymi spôsobmi riešenia (vám môže byť iný spôsob riešenia bližší ako ten, ktorý sme ukázali my). Opäť platí to, čo sme povedali na začiatku: každá logicky správna cesta je dobrá, niet lepšej či horšej.

- 5** Vlak prešiel vzdialenosť medzi stanicami rýchlosťou 90 km/h za 4 hodiny. Akou rýchlosťou môže ísť, ak podľa nového cestovného poriadku má cesta trvať o hodinu dlhšie?

$$\begin{array}{l} \uparrow 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \dots\dots\dots 4 \text{ hod} \\ x \frac{\text{km}}{\text{h}} \dots\dots\dots 5 \text{ hod} \downarrow \end{array}$$

$$\frac{x}{90} = \frac{4}{5}$$

$$x = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Môže ísť rýchlosťou $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- 6** Tri rovnaké čerpadlá napustia do nádrže 50 400 litrov nafty za 7 hodín. O koľko viac (menej) nafty načerpajú, ak pridáme ešte 2 také isté čerpadlá a všetky budú pracovať 4 hodiny?



$$\begin{array}{l} 50\,400 \text{ l} \dots\dots 3 \text{ čerpadlá} \dots\dots 7 \text{ hod} \\ 16\,800 \text{ l} \dots\dots 1 \text{ čerpadlo} \dots\dots 7 \text{ hod} \quad \downarrow : 3 \\ 2\,400 \text{ l} \dots\dots 1 \text{ čerpadlo} \dots\dots 1 \text{ hod} \quad \downarrow : 7 \\ 9\,600 \text{ l} \dots\dots 1 \text{ čerpadlo} \dots\dots 4 \text{ hod} \quad \downarrow \cdot 4 \\ 48\,000 \text{ l} \dots\dots 5 \text{ čerpadiel} \dots\dots 4 \text{ hod} \quad \downarrow \cdot 5 \end{array}$$

Natečie o 2 400 l nafty menej.



- 7** Pätnásť robotníkov natrie za 3 dni 180 metrov plotu. Za koľko dní natrie 9 robotníkov 360 metrov plotu? Predpokladáme, že každý robotník podáva rovnaký, nemenný výkon.

$$\begin{array}{l} 15 \text{ robotníkov} \dots\dots 3 \text{ dni} \dots\dots 180 \text{ m} \\ 15 \text{ robotníkov} \dots\dots 6 \text{ dní} \dots\dots 360 \text{ m} \quad \downarrow \cdot 2 \\ 1 \text{ robotník} \dots\dots 90 \text{ dní} \dots\dots 360 \text{ m} \quad \downarrow \cdot 15 \\ 9 \text{ robotníkov} \dots\dots 10 \text{ dní} \dots\dots 360 \text{ m} \quad \downarrow \cdot 9 \\ 9 \text{ robotníkov natrie plot za 10 dní.} \end{array}$$

- 8** Nádrž sa mala 9 prítokmi naplniť za 21 dní. Po 9 dňoch 3 prítoky vyplí. Za koľko dní naplnilo zostávajúcich 6 prítokov nádrž?

9 prítokov 21 dní 1 nádrž

po 9 dňoch treba naplniť $\frac{12}{21}$ nádrže

$$\begin{array}{l} 9 \text{ prítokov} \dots\dots\dots 12 \text{ dní} \uparrow \dots\dots \frac{12}{21} \text{ nádrže} \\ 6 \text{ prítokov} \dots\dots\dots x \text{ dní} \quad \downarrow \dots\dots \frac{12}{21} \text{ nádrže} \end{array}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{9}{6}$$

$$x = 18 \text{ dní}$$



- 9 Valcová nádoba na piesok je vysoká 1,5 m. Ak je v nej 80 cm piesku, nádoba má hmotnosť 204 kg, ak je v nej 95 cm piesku, má hmotnosť 234 kg. Akú hmotnosť má:
a) prázdna nádoba; b) nádoba, v ktorej je 100 cm piesku; c) plná nádoba?

80 cm piesku + nádoba 204 kg

95 cm piesku + nádoba 234 kg

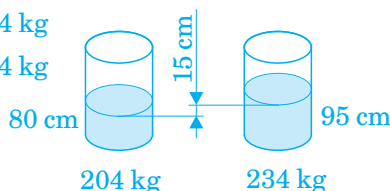
15 cm piesku 30 kg

1 cm piesku 2 kg

a) 80 cm piesku 160 kg nádoba 44 kg

b) 100 cm piesku + nádoba ... 200 kg + 44 kg = 244 kg

c) 150 cm piesku + nádoba ... 300 kg + 44 kg = 344 kg



- 10 Najvyššia povolená rýchlosť v obci je 50 km/h. Policajti odmerali, že osobné auto prešlo úsek dlhý 800 m za 40 s. Dostal vodič auta pokutu za prekročenie maximálnej povolenej rýchlosti?

800 m 40 s

20 m 1 s rýchlosť $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Dostal pokutu.

- 11 Prvá umelá družica Zeme lietala rýchlosťou 8 000 m/s. Touto rýchlosťou obletela Zem za 82 minút. Prúdové lietadlo letí priemernou rýchlosťou 800 km/h. Ako dlho by mu trvalo obletieť Zem?

82 min = 4 920 s

$8\,000 \cdot 4\,920 = 39\,360\,000 \text{ m}$

$800 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 800\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}}$

$39\,360\,000 : 800\,000 = 49,2 \text{ h}$

- 12 Uvarenie jedného vajca trvá 4 minúty. Koľko minút trvá uvarenie 4 vajec?

4 minúty



Úloha 9

Riešenie tejto úlohy je náročné, ak si žiaci neuvedomia, že treba vypočítať hmotnosť pieskového valca s výškou 1 cm.

Úloha 12

Naša odpoveď je, samozrejme, správna iba vtedy, ak dáme všetky vajčká variť naraz do tej istej nádoby. Vieme si predstaviť, že budete mať v triede žiaka či žiakov, ktorí budú tvrdiť, že vajčká varia postupne, preto sa čas varenia štvornásobne predlži. Čo na to zvyšok triedy?

- 13** Dvaja pracovníci firmy zmontujú pódium na festivale za 54 hodín. Organizátori potrebujú skrátiť montáž o 42 hodín. Koľko pracovníkov musí poslať montážna firma?

$$\begin{array}{l} \uparrow 2 \text{ pracovníci} \dots\dots\dots 54 \text{ hodín} \\ \downarrow x \text{ pracovníkov} \dots\dots\dots 12 \text{ hodín} \end{array} \quad \frac{x}{2} = \frac{54}{12}$$

$$x = 9$$

Firma musí poslať 9 pracovníkov.

- 14** Šofér nákladného auta vozil tehly na stavbu domu 3-krát denne a trvalo mu to 8 dní. Majiteľ stavebnej firmy chce dovoz tehál na druhý, rovnako veľký dom, skrátiť o 2 dni. Koľkokrát denne musí šofér priviezť tehly na stavbu?

$$\begin{array}{l} \uparrow 3\text{-krát denne} \dots\dots\dots 8 \text{ dní} \\ \downarrow x\text{-krát denne} \dots\dots\dots 6 \text{ dní} \end{array} \quad \frac{x}{3} = \frac{8}{6}$$

$$x = 4$$

Musí vozit tehly 4-krát denne.

- 15** Predné ozubené koleso na bicykli má 32 zubov a zadné na kolese má 12 zubov. Koľkokrát sa otočí zadné koleso bicykla, ak pravým pedálom otočíš 30-krát? Akú vzdialenosť pri tom prejdeš, ak je obvod bicyklového kolesa 250 cm?

$$\begin{array}{l} \downarrow 32 \text{ zubov} \dots\dots\dots 30\text{-krát} \uparrow \\ \uparrow 12 \text{ zubov} \dots\dots\dots x\text{-krát} \downarrow \end{array} \quad \frac{x}{30} = \frac{32}{12}$$

$$x = 80$$

$$80 \cdot 250 = 20\,000 \text{ cm} = 200 \text{ m}$$

Zadné koleso sa otočí 80-krát. Prejde vzdialenosť 200 m.

- 16** Jurko robí kroky dlhé 60 cm. Cestou do školy urobí 1 530 krokov. Koľko krokov urobí jeho otec cestou na triednu schôdzku, ak robí kroky dlhé 85 cm?

$$\begin{array}{l} \downarrow 60 \text{ cm} \dots\dots\dots 1\,530 \text{ krokov} \uparrow \\ \uparrow 85 \text{ cm} \dots\dots\dots x \text{ krokov} \downarrow \end{array} \quad \frac{x}{1530} = \frac{60}{85}$$

$$x = 1\,080$$

Otec urobí 1 080 krokov.

- 17** Jarka prešla na bicykli 100-metrovú vzdialenosť rýchlosťou 30 km/h. Akou rýchlosťou by musela ísť, aby ju prešla v čase rovnom svetovému rekordu Usaina Bolta v šprinte na 100 metrov?



Svetový rekord (31. 5. 2008): 100 m za 9,72 s

↓ 100 m 9,72 s ↓
↓ x m 1 h = 3 600 s ↓

$$\frac{x}{100} = \frac{3\,600}{9,72}$$

$$x = 37\,037 \frac{\text{m}}{\text{h}} = 37,04 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Musela by ísť rýchlosťou $37,04 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



- 18** V krajčírskom salóne kúpili látku na ušitie sukní. Ak by šili sukne s dĺžkou 50 cm, ušili by ich 70. Koľko sukní ušijú, ak budú mať dĺžku 70 cm?

↓ 50 cm 70 častí ↑
↓ 70 cm x častí ↑

$$\frac{x}{70} = \frac{50}{70}$$

$$x = 50$$

Ušijú 50 sukní s dĺžkou 70 cm.

- 19** Na ušitie šiat je potrebných 4,20 m látky širokej 150 cm. Koľko látky 90 cm širokej treba na ušitie tých istých šiat?



↓ 150 cm 4,20 m ↑
↓ 90 cm x m ↑

$$\frac{x}{4,20} = \frac{150}{90}$$

$$x = 7$$

Látky širokej 90 cm treba 7 m.

- 20** Karol by si za našetrené peniaze mohol kúpiť 25 nanukov po 0,69 eura. Koľko by si za tieto peniaze mohol kúpiť komiksov, ak jeden stojí 2,62 eura?



↑ 25 nanukov 0,64 eur ↓
↑ x komiksov 2,62 eur ↓

$$\frac{x}{25} = \frac{0,69}{2,62}$$

$$x \doteq 6$$

Mohol by si kúpiť 6 komiksov.

Úloha 17

Kontrola ostražitosti. Hoci sme v kapitole Nepriama úmernosť, toto je úloha na priamu úmernosť, ktorú žiaci už majú precvičenú. Vzhľadom na nesúlady v osnovách matematiky a fyziky sa môže stať, že vaši žiaci nebudú vedieť prepočítavať km/h na m/s. Overtte si to, a ak to nevedia, tak im s tým pomôžte.

Úloha 19

Matematika je síce presná veda, ale nie vždy úplne praktická. Táto úloha je toho jasným príkladom: každá krajčírka vám potvrdí, že to čo sa dá ušiť z látky širokej 150 cm sa nemusí dať ušiť z látky širokej iba 90 cm.

Úloha 22

Porovnávať mesačné nájomné rodín jednotlivých žiakov môže byť citlivá téma. Môžete si spolu so žiakmi zistiť výšku priemerneho mesačného nájomného na Slovensku a časť c) riešiť s týmto údajom.

Úloha 23

Nedá sa počítať bez toho, aby sa predtým nevyriešila úloha 22!

21 Rozhodni, či ide o priamu, alebo nepriamu úmernosť.

- | | |
|---|--|
| a) Dĺžka strany štvorca a obvod štvorca: | priama úmernosť – nepriama úmernosť |
| b) Doba potrebná na usušenie 4, alebo 8 tanierov: | priama úmernosť – nepriama úmernosť* |
| c) Hmotnosť jablka a počet jabĺk na 1 kg. | priama úmernosť – nepriama úmernosť |
| d) Doba letu a rýchlosť lietadla. | priama úmernosť – nepriama úmernosť |
| e) Dĺžka strany obdĺžnika a obsah obdĺžnika. | priama úmernosť – nepriama úmernosť |
| f) Dĺžka hrany kvádra a objem kvádra. | priama úmernosť – nepriama úmernosť |

Čo sa nehodí, prečiarň!



*** Usušia sa za rovnako dlhú dobu.**

22 V inzeráte ponúkajú za napísanie 250 adries 20 eur.

- Kolko adries musíš napísať, aby tvoja výplata bola 100 eur?
- Kolko peňazí dostaneš za napísanie 1 000 adries?
- Kolko adries musíš napísať, aby to stačilo na zaplatenie vašich mesačných účtov za telefonovanie?

250 adries 20 eur

1 adresa 0,08 eura

a) $1\,000 : 0,08 = 1\,250$ adries

b) $1\,000 \cdot 0,08 = 80$ eur

23 Janke trvá napísanie jednej adresy v priemere 18 sekúnd.

- Za aký čas zarobí 100 eur?
- Za aký čas zarobí na váš mesačný účet za telefonovanie?
- Rieš zadania a), b), ak Janka po prvých sto adresách skráti priemerný čas na 12 sekúnd.

Ak ti chýba nejaký údaj, vráť sa k úlohe 22.



1 adresa 18 sekúnd 0,08 eura

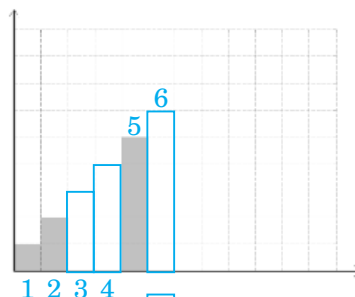
a) 100 eur $1\,250$ adries $22\,500\text{ s} = 6\text{ h }15\text{ min}$

b) 12 sekúnd $1\,250$ adries $15\,000\text{ s} = 4\text{ h }10\text{ min}$

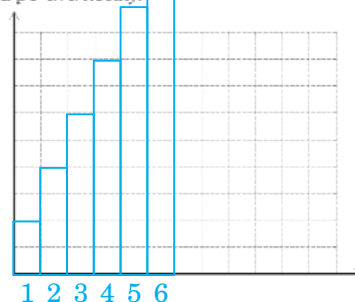
Krížom-krážom pomerom, priamou a nepriamou úmernosťou

- 1** Rodina Užasnutých sa vydala na zber jahôd. Na obrázku vidno ako sa darilo ich deťom.
Po prvej hodine mali jeden košík, po druhej už dva košíky...
Dokresli kolko mali po tretej, štvrtej a šiestej hodine
ak stále oberali rovnakým tempom. Doplň tabuľku.

Čas [h]	1	2	3	4	5	6
Počet košíkov	1	2	3	4	5	6

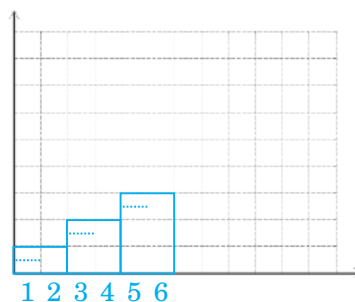


- 2** Ocko Užasnutý je skúsenejší zberač. Úplne sám nazbieral každú hodinu po dva košíky.
Nakresli počty jeho košíkov po hodine až po šiestu hodinu. Vieš povedať, koľko košíkov by mal po 18. hodine nepretržitej práce?

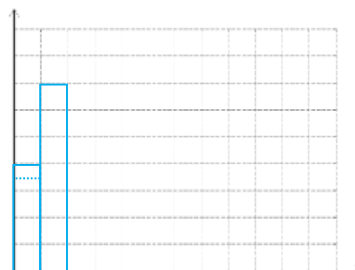


Po 18. hodine by mal 36 košíkov.

- 3** Zato Užasnutej mame sa veľmi nedarilo. Za každé 2 hodiny naoberala jeden košík. Nakresli počty jej košíkov až po šiestu hodinu.



- 4** Nakresli zberateľské výsledky celej rodiny po hodinách.



Pokračujte v zošitoch.

Úloha 3

Čo nakreslíte do prvého stĺpca:
1/2 košíka, alebo 1 košík v trvaní
dve hodiny? Diskutujte so žiakmi.

Úloha 4

Graf urobte do zošitov a spoločne
na tabuľu.



Úloha 5

Najťažšie na tejto úlohe asi bude pre vašich žiakov zvoliť vhodnú mierku na x-ovej a y-ovej osi. Pomôžte im s tým. Vysvetlite im, ako majú postupovať. Nami napísané výsledky sú vypočítané – z grafu sa dajú určiť iba odhadom.

- 5** Lietadlo letí stálou rýchlosťou 600 km/hod. Nakresli, akú vzdialenosť preletelo v jednotlivých hodinách. Zisti z obrázka, akú vzdialenosť preletelo lietadlo za:

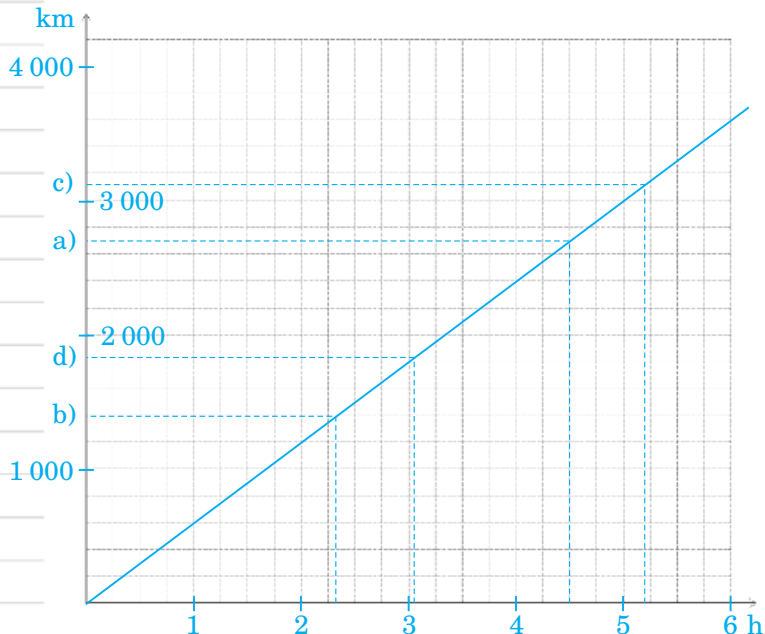
- a) 4 hodiny a 30 minút,
- b) 2 hodiny a 20 minút,
- c) 5 hodín a 12 minút,
- d) 3 hodiny a 3 minúty.

a) 2 700 km

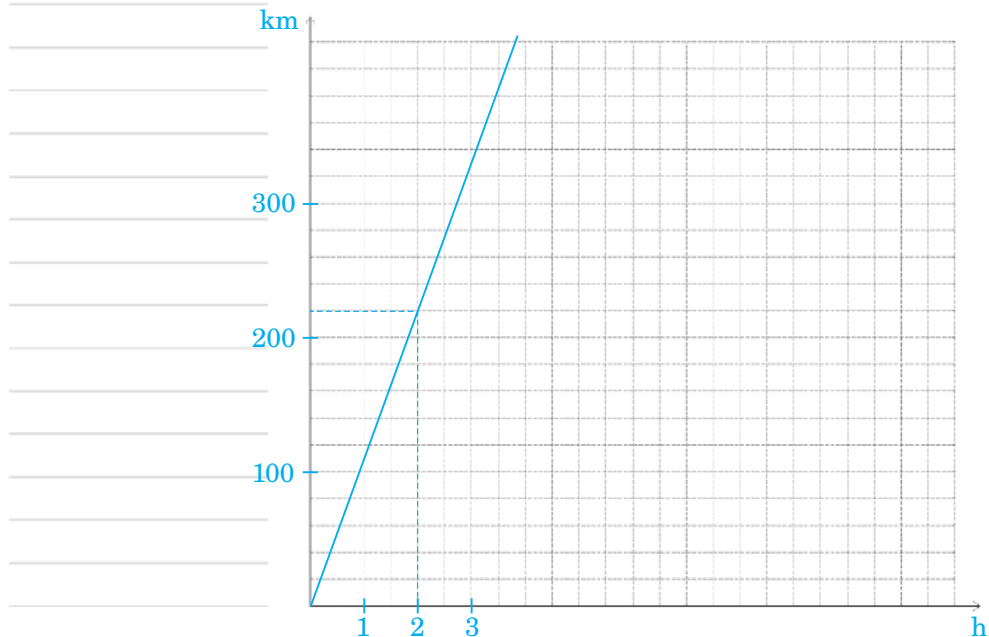
b) 1 400 km

c) 3 120 km

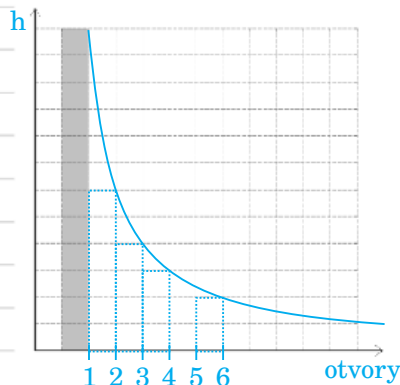
d) 1 830 km



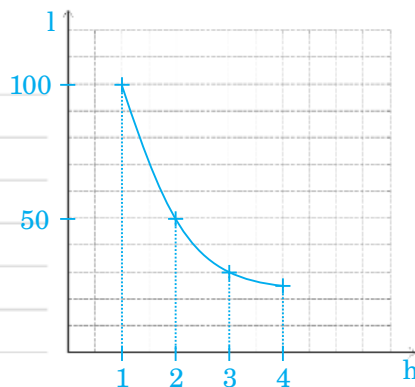
- 6** Auto ide po diaľnici stálou rýchlosťou a za dve hodiny prešlo 220 km. Dokážeš z tohto jediného údaju znázorniť jeho pohyb podobným obrázkom ako v predchádzajúcej úlohe?



- 7** Bazén má na napúšťanie 10 otvorov s rovnakým prítokom. Na obrázku vidno, že jedným z nich sa naplní za 12 hodín. Dokresli obrázok, ako rýchlo sa bude bazén naplňovať 2, 3, 4... otvormi. Spoj krajné body úsečiek plynulou čiarou.



- 8** Pri vypúšťaní vodnej nádrže v nej po prvej hodine zostalo 100 litrov vody. Po druhej hodine polovica z tohto objemu, po tretej hodine tretina z tohto objemu, po štvrtej hodine štvrtina... Nakresli obrázok vypúšťania vodnej nádrže.



- 9** Dva autobusy odvážajú ľudí na festival. Keď sa otočia trikrát, odvezú 252 ľudí. Koľkokrát sa musia otočiť 4 autobusy, aby odviezli 840 ľudí?

2 autobusy 3-krát 252 ľudí

1 autobus 3-krát 126 ľudí

1 autobus 1-krát 42 ľudí

4 autobusy 1-krát 168 ľudí

4 autobusy 5-krát 840 ľudí

4 autobusy sa musia otočiť 5-krát.

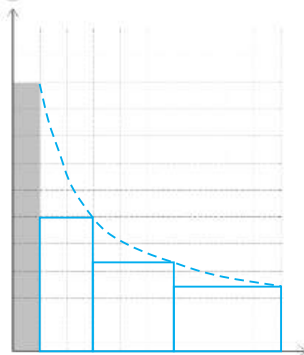
Úloha 7 Úloha 8

Nie je podstatné, aby ste tieto grafy pomenovali nepriama úmernosť. Dôležitá je skúsenosť žiakov, že nie každý matematický graf je priamka. Podobné otázky ako sme sformulovali v úlohe 7, môžete vy a vaši žiaci tvoriť aj v úlohe 8 (a všetkých ďalších úlohách).

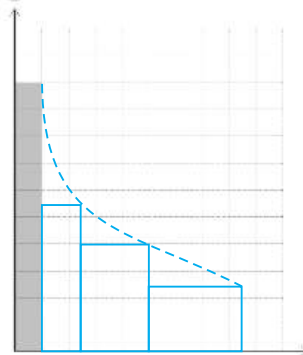


- 10** Obdĺžnik s obsahom 10 cm^2 má strany dlhé 1 cm a 10 cm . Nakresli do obrázka dĺžku druhej strany obdĺžnika s rovnakým obsahom, ktorého jedna strana je dlhá

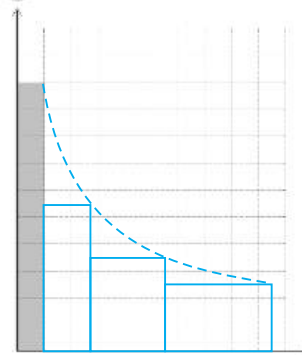
a 2 cm , 3 cm , 4 cm ...



b 1.5 cm ; 2.5 cm ; 3.5 cm ...

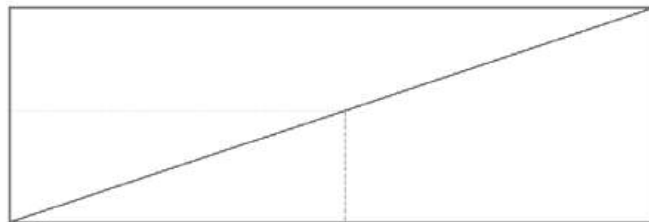


c 1.7 cm ; 2.7 cm ; 3.7 cm ...



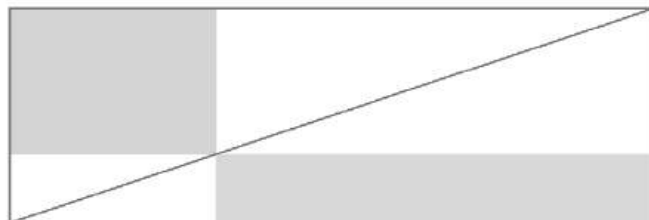
- 11** Obdĺžnik na obrázku má dĺžky strán 12 cm a 4 cm . Vypočítaj pomer dĺžok dvoch čiarkovaných úsečiek. Narysuj a odmeraj ďalšie takéto úsečky a vypočítaj ich pomer. Čo vieš povedať o tomto pomere?

$1 : 1$

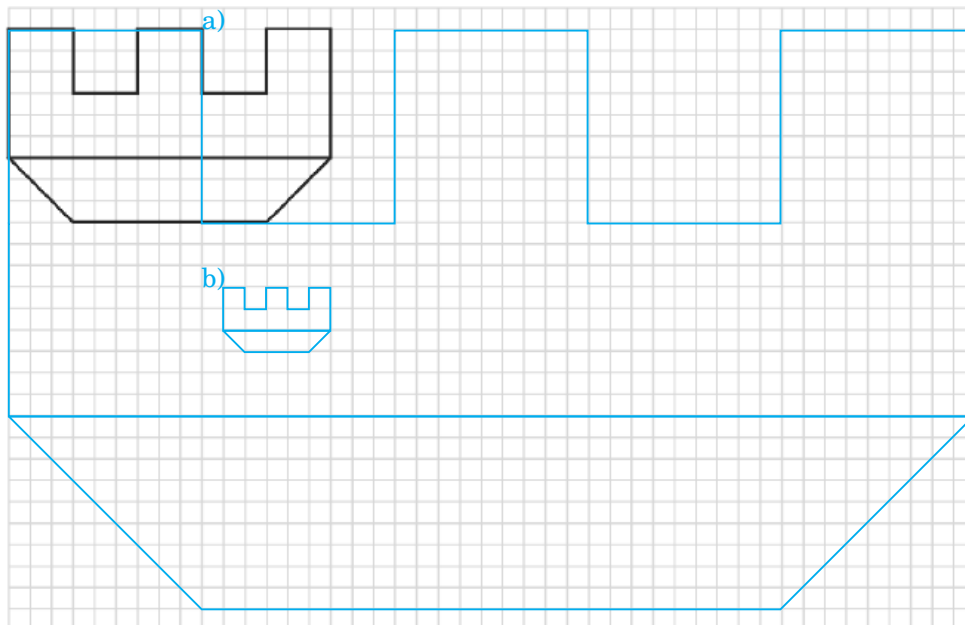


- 12** Ktorá z vyznačených častí obdĺžnika má väčší obsah?

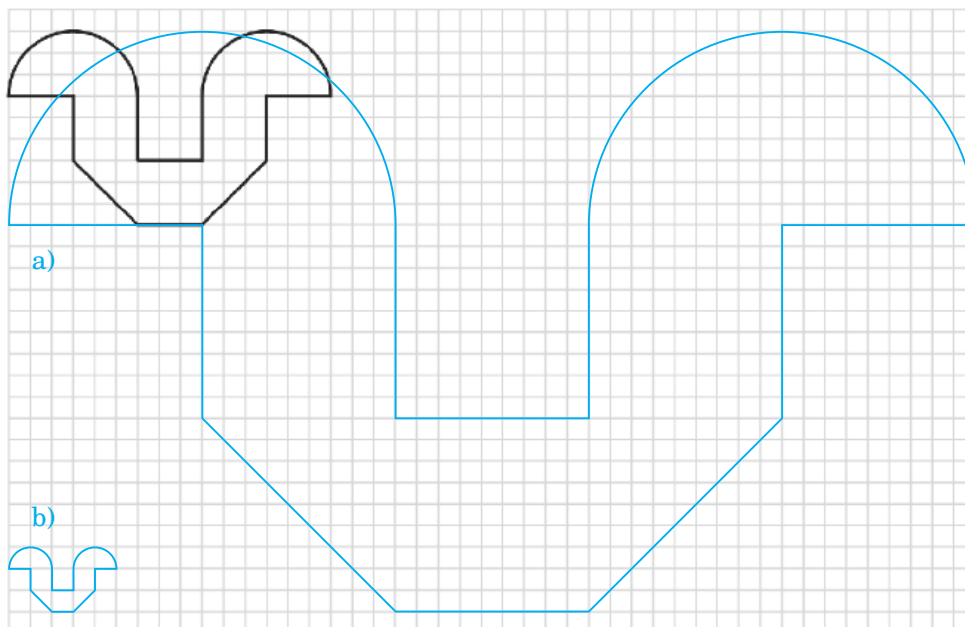
Sú rovnaké.



13 Daný obrázok a) zväčši v pomere 3 : 1. b) zmenši v pomere 1 : 3.

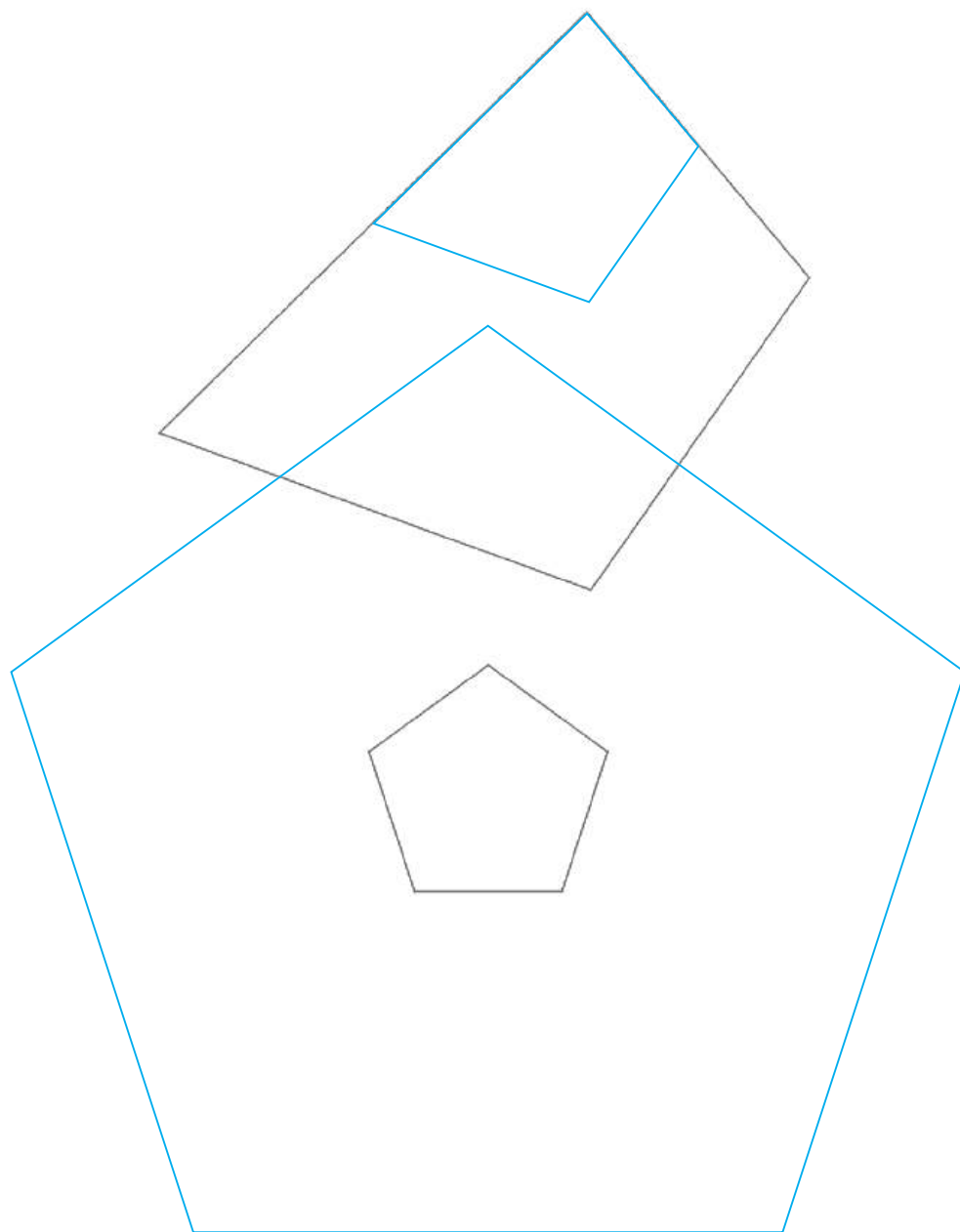


14 Daný obrázok a) zväčši v pomere 3 : 1. b) zmenši v pomere 1 : 3.



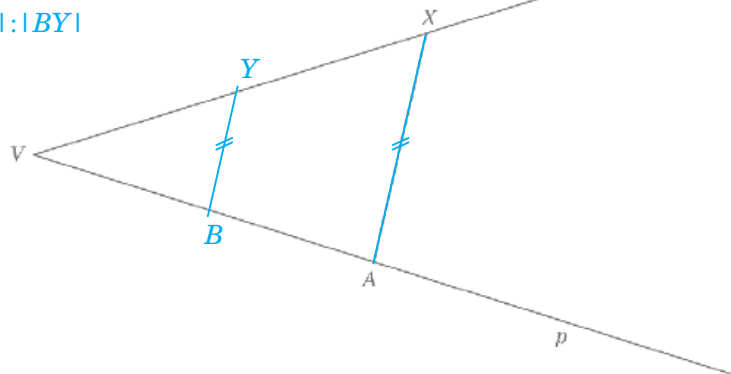


- 15** a) Štvoruholník zmenší v pomere 1 : 2. b) Päťuholník zväčší v pomere 4 : 1.

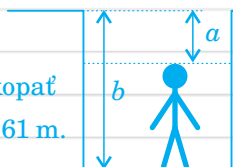


- 16** Na priamke p zvol bod B a narysuj úsečku rovnobežnú s úsečkou AX , ktorej druhý vychod Y bude ležať na priamke q . Vypočítaj pomery dĺžok $VA : AX$ a $VB : BY$. Narysuj ďalšie také úsečky a vypočítaj zodpovedajúce pomery. Čo sa ti podarilo zistiť?

$$|YA| : |AX| = |VB| : |BY|$$



- 17** Ježibaba slúbila princovi, že ho nepremení na žabu, ak pre ňu vykope takúto jamu: Ak sa do nej ježibaba postaví, tak jej päty budú trojnásobne hlbšie ako temeno jej hlavy. Akú hĺbkú jamu musí princ vykopať, ak je ježibaba vysoká 1,74 m?



$$\begin{aligned} b &= 3a & b &= 261 \\ b - a &= 174 \text{ cm} \\ 2a &= 174 \\ a &= 87 \end{aligned}$$

Princ musí vykopať jamu hĺbokú 2,61 m.



- 18** V stolárskej dielni majú vyrobiť niekoľko kusov nového výrobku.

A: So svojimi nástrojmi dokážu vyrobiť jeden výrobok za hodinu.

B: Ak si nástroje trochu upravia, dokážu vyrobiť jeden výrobok za polhodinu. Táto úprava by trvala 2 hodiny.

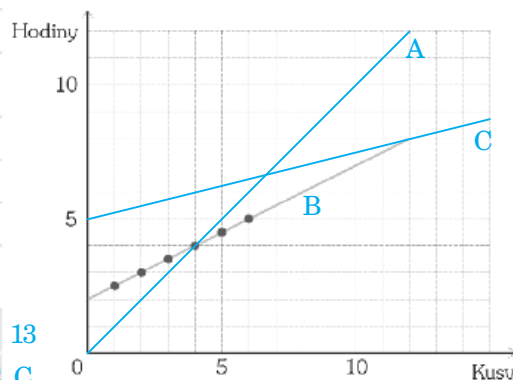
C: Ak si na výrobok pripraví úplne nové špeciálne nástroje, tak dokážu vyrobiť jeden výrobok za štvrtihodinu. Táto úprava by trvala 5 hodín.

Na obrázku je priebeh výroby podľa postupu B. Nakresli priebehy podľa A a C.

Vymysli ešte postup D a nakresli jeho priebeh.

Ktorým spôsobom je najvýhodnejšie vyrábať 1, 2, 3... výrobky? Vyplň tabuľku.

Počet kusov	1	2	3	4	5	6	12	13
Najlepší postup	A	A	A	A/B	B	B	B/C	C



Úloha 16

V tejto úlohe sme ukázali úvahu (postup), ktoré nám umožňujú deliť úsečku AV v ľubovoľnom pomere, aj keď nepoznáme jej dĺžku pomocou delenia úsečky BV , ktorej dĺžku si môžeme určiť tak, aby sa nám dobre delilo.

Úloha 18

Najväčším problémom pre vašich žiakov asi bude čítať z grafu potrebné údaje. Tu pomôže iba trpezlivosť a trpezlivosť a trpezlivosť.



Úloha 19

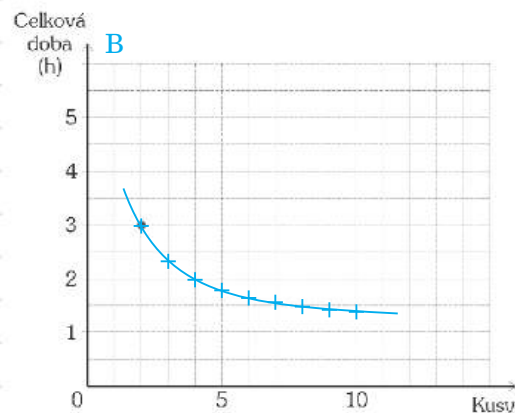
Úloha 20

Pripomíname aritmetický priemer.

- 19** Pri postupe B z úlohy 18 v dielni vyrobí prvé dva výrobky za 3 hodiny. Teda priemerná doba výroby jedného výrobku je 1,5 hodiny. Vypočítaj priemernú dobu výroby pre 3, 4, 5... výrobkov. Doplň obrázok.



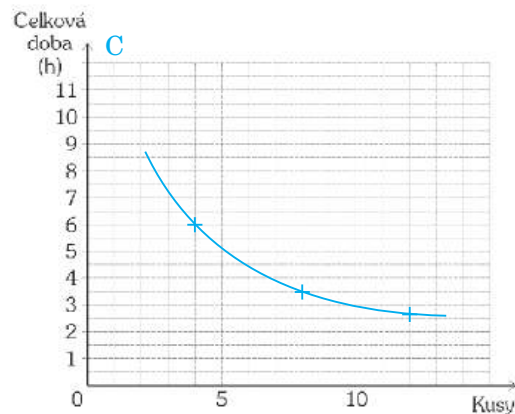
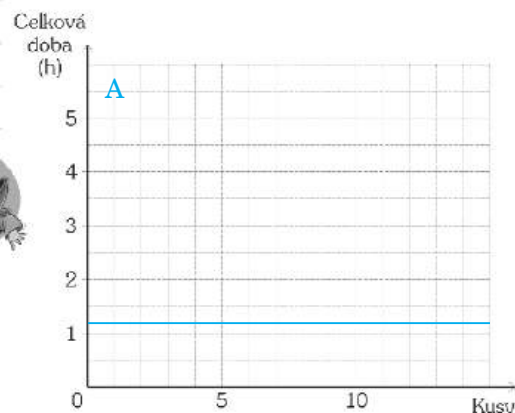
Počet výrobkov	Doba	
	celková	priemerná
1		
2	3	1,5
3	3,5	1,17
4	4	1
5	4,5	0,9
6	5	0,83
7	5,5	0,79
8	6	0,75
9	6,5	0,72
10	7	0,7



- 20** Vypĺň tabuľku a nakresli priebehy ako v predchádzajúcej úlohe aj pre postupy A a C z úlohy 18.



Počet výrobkov	Postup A: doba		Postup C: doba	
	celková	priemerná	celková	priemerná
1	1	1		
2	2	1		
3	3	1		
4	4	1	6	1,5
5	5	1		
6	6	1		
7	7	1		
8	8	1	7	0,875
9	9	1		
10	10	1		
12	12	1	8	0,6



Trojčlenka vždy patrila k základnému majstrovstvu vzdelaného človeka. Najmä preto, že je to v podstate veľmi jednoduchý, napriek tomu však veľmi silný matematický nástroj. Matematický nástroj, ktorý má časté praktické využitie a ľuďom oddávna pomáhal v každodennom živote. Vyriešte si niekoľko úloh z nedávnej minulosti, v ktorých sme zachovali vtedy platné ceny aj jazykový štýl.

● 1 hl piva jest za 360, zač jest 49 l?

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l} \dots\dots 360$$

$$1 \text{ l} \dots\dots 3,6$$

$$49 \text{ l} \dots\dots 176,4$$

$$49 \text{ l stojí } 176,4.$$

●● Ak istá kopa sena vystačí ovčínu so 180 kusmi na 36 dní, na koľko dní vystačí 240 kusmi?

$$\begin{array}{l} \downarrow 180 \text{ ks} \dots\dots\dots 36 \text{ dní} \uparrow \\ \downarrow 240 \text{ ks} \dots\dots\dots x \text{ dní} \uparrow \end{array}$$

$$x = 27 \text{ dní}$$

$$240 \text{ kusom by vystačila } 27 \text{ dní.}$$

●●● 4 gombíky sú za 42 halierov, zač je 24 tuctov?

$$\text{tucet} = 12 \text{ ks} \dots\dots 3 \cdot 4 \text{ gombíky} \dots\dots 126 \text{ halierov}$$

$$24 \text{ tuctov} \dots\dots 24 \cdot 126 = 3 \, 024 \text{ halierov}$$

$$24 \text{ tuctov stojí } 3 \, 024 \text{ halierov.}$$

●●●● Ak pisár píše denne 7 hodín, opíše knihu za 60 dní; za koľko dní by ju opísal, keby denne písal 5 hodín?

$$\begin{array}{l} \downarrow 7 \text{ hodín} \dots\dots\dots 60 \text{ dní} \uparrow \\ \downarrow 5 \text{ hodín} \dots\dots\dots x \text{ dní} \uparrow \end{array}$$

$$x = 84 \text{ dní}$$

$$\text{Opísal by ju za } 84 \text{ dní.}$$



Pozor na desatinnú čiarku!
Tu sa skrýva za bodku a ešte
k tomu hore!

●●●●●● 15 robotníkov urobí za 30 dní 100 pokrývok konských.
koľko pokrývok urobí 18 robotníkov za 45 dní?

$$\begin{array}{lcl} 15 \text{ robotníkov} & \dots\dots & 30 \text{ dní} \dots\dots 100 \text{ p} \\ 18 \text{ robotníkov} & \dots\dots & 30 \text{ dní} \dots\dots 120 \text{ p} \\ 18 \text{ robotníkov} & \dots\dots & 45 \text{ dní} \dots\dots 180 \text{ p} \end{array} \left. \begin{array}{l} \cdot \frac{18}{15} \\ \cdot \frac{45}{30} \end{array} \right\}$$

●●●●●● Zo sobratého mlieka odvárajú tvaroh. Zo 100 l sadnutého mlieka
je 7,5 kg tvarohu; koľko tvarohu možno odvariť z 36 litrov sadnutého mlieka?

$$\begin{array}{lcl} \uparrow 100 \text{ l} & \dots\dots\dots & 7,5 \text{ kg} \uparrow \\ 36 \text{ l} & \dots\dots\dots & x \text{ kg} \end{array}$$

$$x = 2,7 \text{ kg}$$

Získame 2,7 kg tvarohu.

●●●●●● Volakolkí murári postavili by dom za 36 dní, keby pracovali denne
8,5 hodín; koľko hodín denne majú pracovať, aby postavili ten dom za 21 dní?

$$\begin{array}{lcl} \uparrow 8,5 \text{ hod} & \dots\dots\dots & 36 \text{ dní} \downarrow \\ x \text{ hod} & \dots\dots\dots & 21 \text{ dní} \end{array}$$

$$x \doteq 14,57 \text{ hod denne}$$

Majú pracovať takmer 15 hodín denne.



●●●●●● Našu líku skosili vlni 12 kosci za 7 dní; koľko koscov
máme toho roku najat, keď chceme, aby naša líka bola skosená za 3 dni?

$$\begin{array}{lcl} \uparrow 12 \text{ koscov} & \dots\dots\dots & 7 \text{ dní} \downarrow \\ x \text{ koscov} & \dots\dots\dots & 3 \text{ dni} \end{array}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{7}{3}$$

$$x = 28$$

Máme najat 28 koscov.

V štyridsiatych rokoch minulého storočia riešili žiaci na slovenských školách aj takéto úlohy *Trojčlenky složitej*. Poradíte si s nimi aj vy?

● V lese je zamestnané 84 robotníkov sadením stromkov. Pri 10-hodinovej práci denne skončili by prácu za 24 dní. Po 7 dňoch odíde 14 robotníkov; za aký čas dokončia sadenie stromkov ostatní, keď od toho dňa budú pracovať 12 hodín denne?

Po 7 dňoch: $\downarrow$ 84 robotníkov 170 hod $\uparrow$ (17 dní 10 hodín)
 $\downarrow$ 70 robotníkov 12x hod $\uparrow$ (x dní 12 hodín)

$$\frac{12x}{170} = \frac{84}{70}$$

$$x = 17$$

Sadenie dokončia po 17 dňoch.

●● Na vydláždenie izby potrebovali by sme 28 dosák 2 m dlhých a 20 cm širokých, ale máme dosky len 3 m dlhé a 25 cm široké; koľko budeme potrebovať týchto?

$$28 \text{ dosák} \dots 2 \text{ m} \times 0,2 \text{ m} \dots S = 28 \cdot 2 \cdot 0,2 = 11,2 \text{ m}^2$$

$$x \text{ dosák} \dots 3 \text{ m} \times 0,25 \text{ m} \dots x = 11,2 : (3 \cdot 0,25) = 14,9\bar{3}$$

Budeme ich potrebovať 15.



●●● 7-členová rodina zje 50 kg chleba za 32 dní; koľko chleba potrebuje v tých istých pomeroch žijúca 10-členová domácnosť na mesiac?

$\downarrow$ 50 kg 32 · 7 človekodní $\uparrow$
 $\downarrow$ x kg 30 · 10 človekodní $\uparrow$

$$\frac{x}{50} = \frac{300}{224}$$

$$x \doteq 66,96$$

10-členná domácnosť potrebuje na mesiac 67 kg chleba.

Úlohy pre ozajstných matematických labužníkov! Pripomeňte vašim žiakom, že pre ich starých rodičov to boli bežné školské úlohy, z ktorých boli skúšaní a známkovani!

Úloha 1

Pripomíname pojmy, s ktorými sa žiaci budú stretávať počas celej kapitoly. Zopakujte si vlastnosti súhlasných a striedavých uhlov. My sme vyznačili iba jednu dvojicu súhlasných a striedavých uhlov.

Úloha 2

Veľkosti uhlov môžeme počítať vychádzajúc z vlastností vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka alebo z dvojíc uhlov (súhlasné, vrcholové, susedné, popríade aj striedavé).

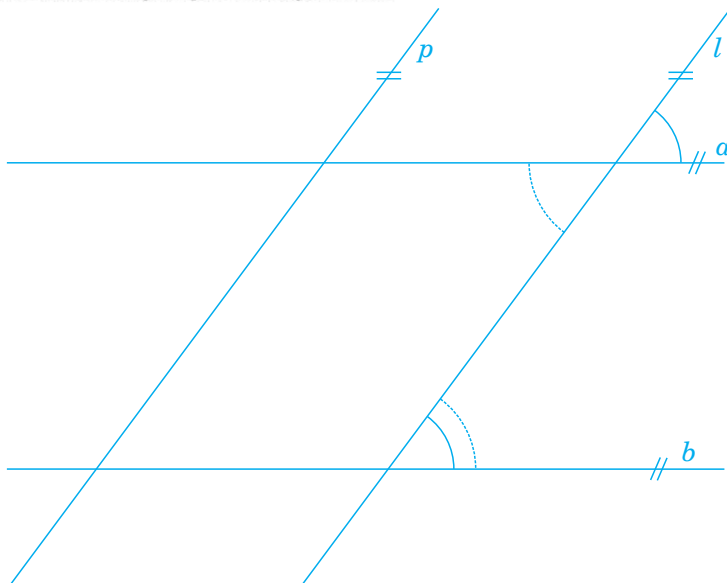
6 Rovnobežník, konštrukcia rovnobežníka

Rovnobežník



1 Do jedného obrázka postupne:

- narysuj dve rovnobežné priamky $a \parallel b$ a priamku p , ktorá je s nimi rôznobežná,
- narysuj priamku l , ktorá je rovnobežná s priamkou p ,
- vyznač červenou farbou všetky dvojice súhlasných uhlov,
- vyznač zelenou farbou všetky dvojice striedavých uhlov.



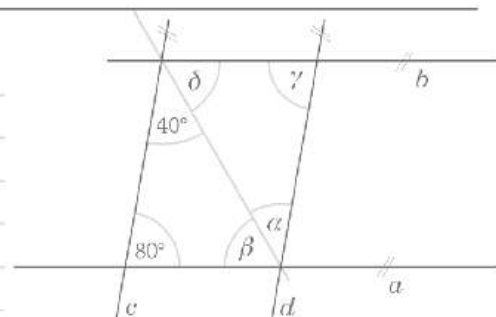
2 Vypočítaj veľkosti vyznačených uhlov, ak priamky a, b a c, d na obrázku sú dvojice rovnobežiek.

$$\alpha = 40^\circ$$

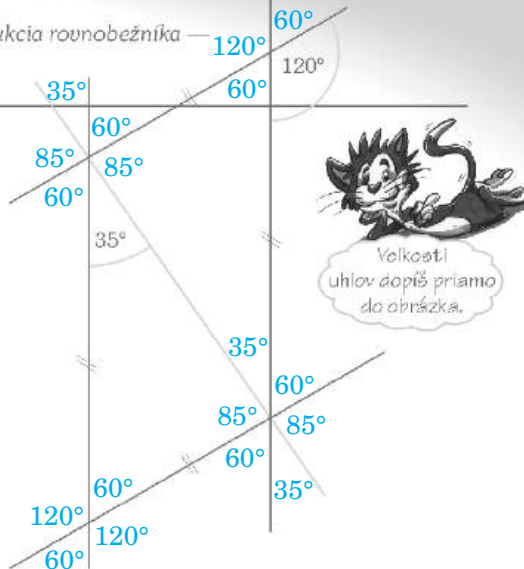
$$\beta = 60^\circ$$

$$\gamma = 80^\circ$$

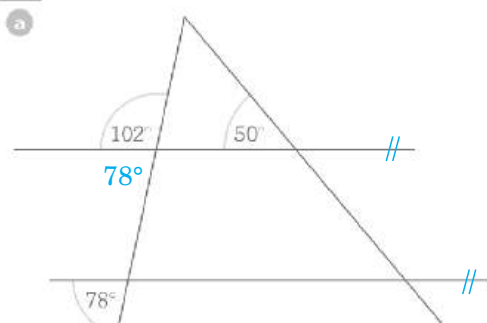
$$\delta = 60^\circ$$



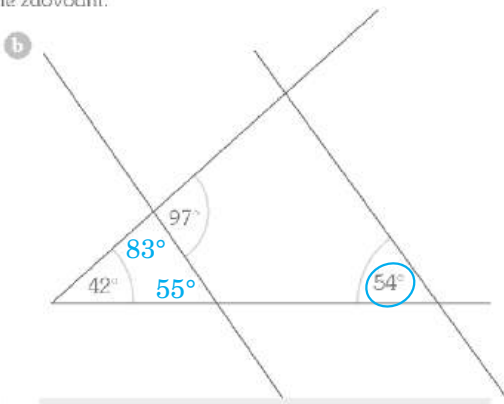
3 Vypočítaj veľkosť všetkých uhlov na obrázku.



4 Označ priamky, ktoré sú rovnobežné. Svoje tvrdenie zdôvodni.

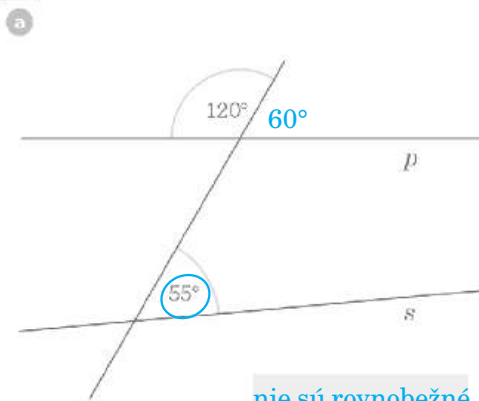


78° uhly sú súhlasné,
priamky sú rovnobežné

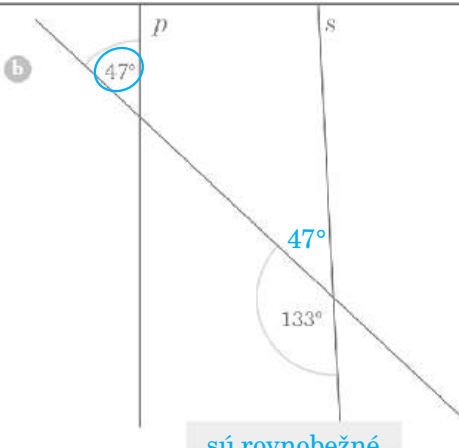


$55^\circ \neq 54^\circ$ nie sú rovnobežné

5 Sú priamky p , s na obrázku rovnobežné?



nie sú rovnobežné



sú rovnobežné

Úloha 4

Zdôvodňujeme na základe vlastností rovnobežných priamok – priamka, ktorá ich pretína, vytvára dvojice súhlasných uhlov – a v prípade **b**) to tak nie je.

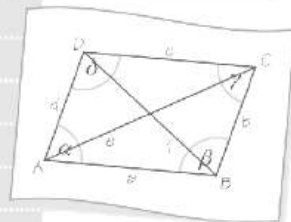


Úloha 6

V tabuľke po vyplnení pekne vidieť, ktoré vlastnosti rovnobežníka platia všeobecne a ktoré sú špecifické pre ten-ktorý rovnobežník. Upozornite žiakov na to, že tabuľku môžu používať (a je dobrým pomocníkom) pri riešení ďalších úloh o rovnobežníkoch.

6 Do každého poľa tabuľky doplňte alebo nie.

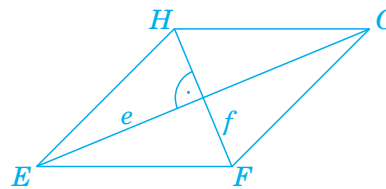
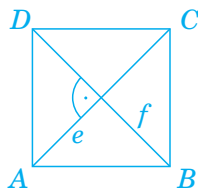
	Štvorec	Obdĺžnik	Kosoštvorec	Kosodĺžnik
$a = b = c = d$	A	N	A	N
$a = c, b = d$	A	A	A	A
$a \perp b, b \perp c, c \perp d, d \perp a$	A	A	N	N
$a \parallel c, b \parallel d$	A	A	A	A
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$	A	A	N	N
$\alpha = \gamma, \beta = \delta$	A	A	A	A
$e = f$	A	A	N	N
$e \perp f$	A	N	A	N
e, f sa rozpolujú	A	A	A	A



7 Ku každej odpovedi nakresli obrázok.

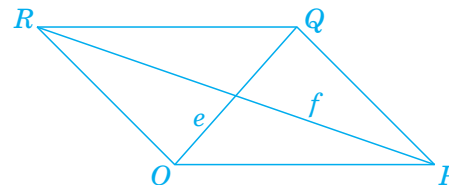
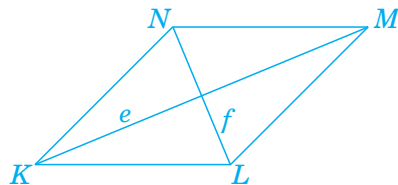
a Ktoré rovnobežníky majú na seba kolmé uhlopriečky?

štvorec a kosoštvorec



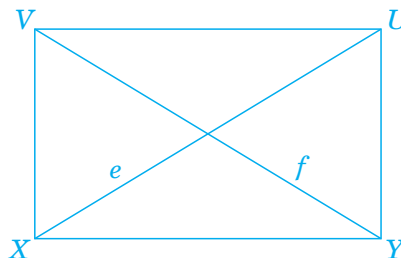
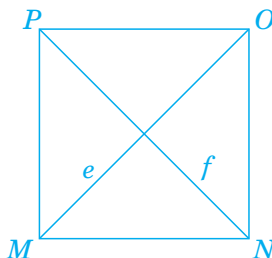
b Ktoré rovnobežníky nemajú rovnako dlhé uhlopriečky?

kosoštvorec a kosodĺžnik



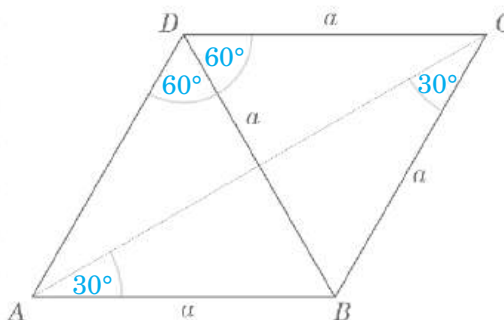
c Ktoré rovnobežníky majú rovnako dlhé uhlopriečky?

štvorec a obdĺžnik



- 8 $ABCD$ je kosoštvorec. Dĺžka uhlopriečky BD sa rovná dĺžke strany kosoštvorca. Vypočítaj veľkosti vyznačených uhlov.

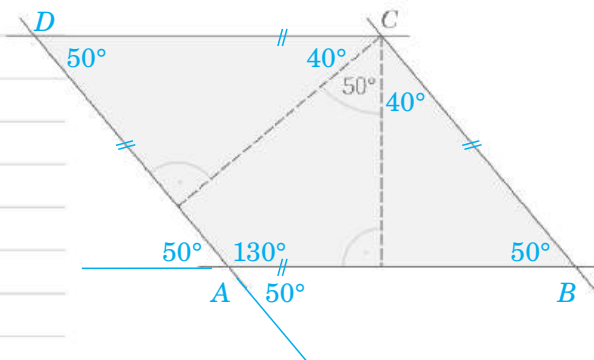
$\triangle ABD$ je rovnostranný



- 9 Vypočítaj veľkosť všetkých vnútorných uhlov rovnoběžníka na obrázku.

$$|\angle DAB| = 130^\circ = |\angle DCB|$$

$$|\angle ABC| = 50^\circ = |\angle CDA|$$

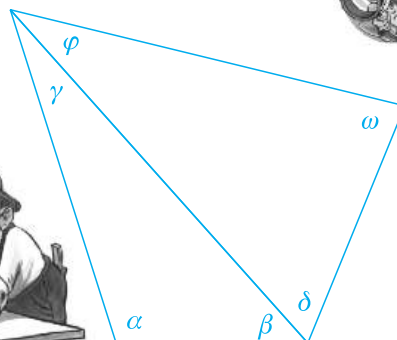


- 10 Súčet veľkostí vnútorných uhlov každého štvoruholníka je 360° . Je to pravda? Zdôvodni.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\delta + \omega + \varphi = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \omega + \varphi = 360^\circ$$



Úloha 9

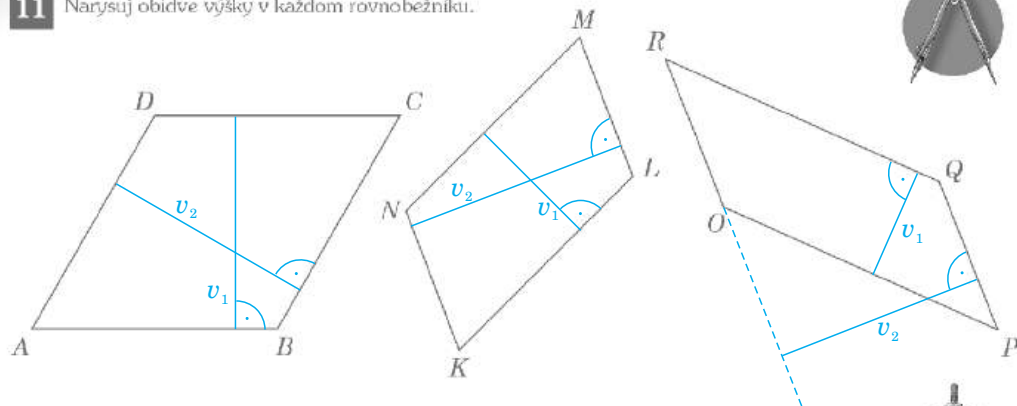
Pripomeňte žiakom, že rovnoběžník má dvojice protiľahlých strán rovnobežné a súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180° .

Úloha 10

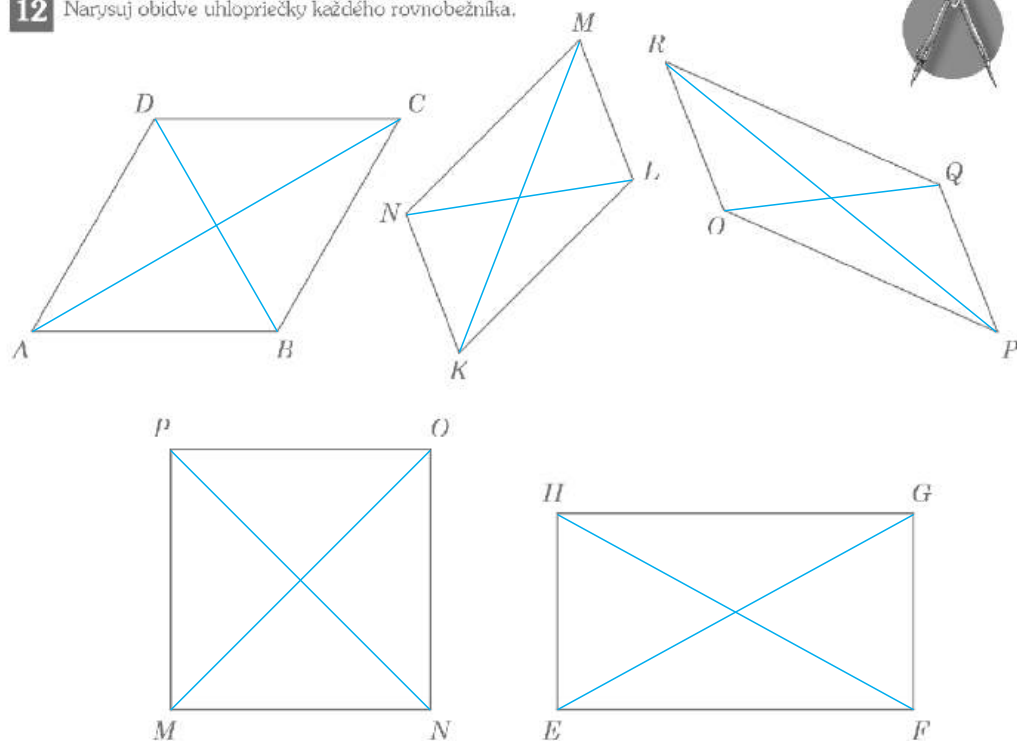
Jedna z najkrajších, najľahších a u žiakov najobľúbenejších dôkazových úloh.



11 Narysuj obidve výšky v každom rovnobežníku.



12 Narysuj obidve uhlopriečky každého rovnobežníka.



13 Akú vlastnosť majú uhlopriečky rovnobežníka? Over v predchádzajúcej úlohe.

rozpočujú sa

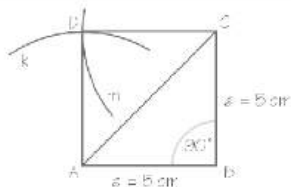


Konštrukcia rovnobežníka



1 Narysuj štvorec so stranou dlhou 5 cm.

Náčrt:



Konštrukcia:

Rozbor: Viem narysovať $\triangle ABC$ (sus).

$$|AB| = |BC| = 5 \text{ cm}, \angle ABC = 90^\circ$$

$$|AD| = |CD| = 5 \text{ cm}$$

$$D \in k(A; 5 \text{ cm}) \cap m(C; 5 \text{ cm})$$

Postup konštrukcie: 1. $\triangle ABC$ (sus)

$$2. k; k(A; 5 \text{ cm})$$

$$3. m; m(C; 5 \text{ cm})$$

$$4. D; D \in k \cap m$$

$$5. \square ABCD$$

2 Narysuj štvorec, ktorého uhlopriečka je dlhá 6 cm.

Náčrt:

Konštrukcia:

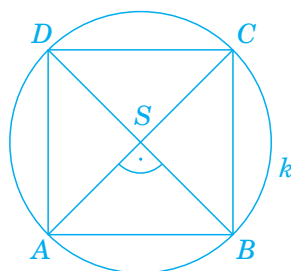


Rozbor: $|AS| = \frac{1}{2} |AC|$ $\triangle ABS$ (sus)

$$C \in \angle \overrightarrow{AB} \quad D \in \angle \overrightarrow{BS}$$

$$k(S; 3 \text{ cm})$$

Postup konštrukcie:



Najmä zo začiatku sa žiaci môžu stratiť v záplave geometrických značiek, ktoré pri konštrukčných úlohách používame. Podstatné je, aby zvládli, ktoré prvky charakterizujú ten-ktorý geometrický útvar a aby ho vedeli týmito prvkami určiť. Možno je dobrou cestou (najmä pri slabších žiakoch) nechať ich napríklad postup konštrukcie napísať slovami, aby vám bolo jasné, v čom má daný žiak problém. Nerozumie samotnej podstate konštrukčnej úlohy, alebo to iba nevie „zašifrovať“ do geometrických znakov?

Pri každej úlohe je naznačená myšlienka riešenia. Samozrejme, váš postup môže byť niekedy odlišný od nášho, ale tak, ako sme každý iný, rôzne pristupujeme aj k riešeniu problémov okolo seba.

Úloha 1

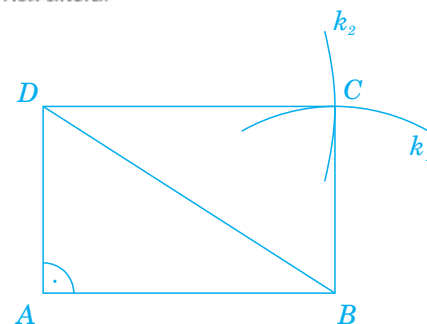
Možností, ako postupovať pri konštrukcii štvorca, je veľa. Ponúkame jednu z ciest, ktorá využíva konštrukciu sus trojuholníka. Každý žiak si môže vybrať svoj spôsob, dôležité je, aby rozbor úlohy bol správny a postup konštrukcie zodpovedal samotnej konštrukcii.



3 Narysuj obdłużnik so stranami dlhými 4 cm a 5 cm.

Náčrt:

Konstrukcia:



Rozbor: $\triangle ABD$ (sus)

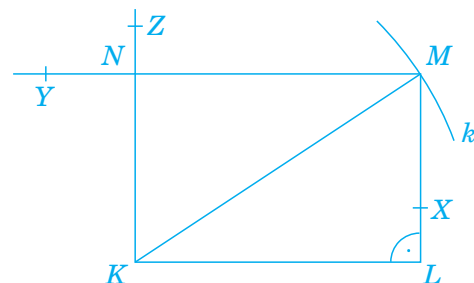
$$C \in \begin{cases} k_1(B; 4 \text{ cm}) \\ k_2(D; 5 \text{ cm}) \end{cases}$$

Postup konstrukcie:

4 Narysuj obdłużnik $KLMN$, ktorého strana KL má dĺžku 6 cm a uhlopriečka KM je dlhá 8 cm.

Náčrt:

Konstrukcia:



Rozbor: $K, L; |KL| = 6 \text{ cm}$

$$M \in \begin{cases} \overrightarrow{LX}, | \angle KLM | = 90^\circ \\ k(K; 8 \text{ cm}) \end{cases} \quad N \in \begin{cases} \overrightarrow{MY}, | \angle LNM | = 90^\circ \\ \overrightarrow{KZ}, | \angle LKN | = 90^\circ \end{cases}$$

Postup konstrukcie:

5 Zostroj kosoštvorec $ABCD$, ak $|AB| = 4,5 \text{ cm}$ a $|\angle ADC| = 105^\circ$.

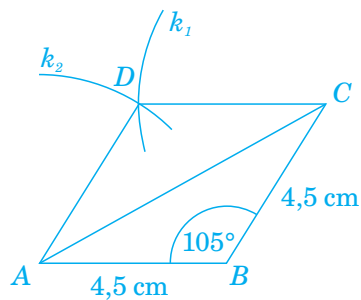
Náčrt:

Konstrukcia:

Rozbor: $\triangle ABC$ (sus)

$$D \in \begin{cases} k_1(C; 4,5 \text{ cm}) \\ k_2(A; 4,5 \text{ cm}) \end{cases}$$

Postup konstrukcie:



6 Zostroj kosoštvorec, ktorý má dĺžku strany 5 cm a výšku 4,5 cm.

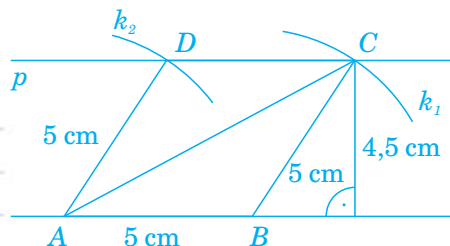
Náčrt:

Konstrukcia:

Rozbor: $A, B; |AB| = 5 \text{ cm}$

$$C \in \begin{cases} p \parallel AB \wedge |pAB| = 4,5 \text{ cm} \\ k_1(B; 5 \text{ cm}) \end{cases} \quad D \in \begin{cases} p \\ k_2(A; 5 \text{ cm}) \end{cases}$$

Postup konstrukcie:



Úloha 5

Zatiaľ čo v prvých príkladoch sme konštrukcie trojuholníka podrobne opísali, tu už volíme skratku.



Narysuj tri rôzne rovnobežníky.

- Označ v každom rovnobežníku vrcholy A, B, C, D a vnútorné uhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
- Narysuj osi uhlov α a β a označ ich o_α a o_β .
- Odmeraj veľkosť uhla, ktorý zvierajú osi o_α a o_β .
- Doplň predpoklad:

Osi dvoch susedných uhlov rovnobežníka sú

Najdi rovnobežník, pre ktorý predpoklad neplatí.



Doplň.

$$|\angle CBX| = 180^\circ - \beta$$

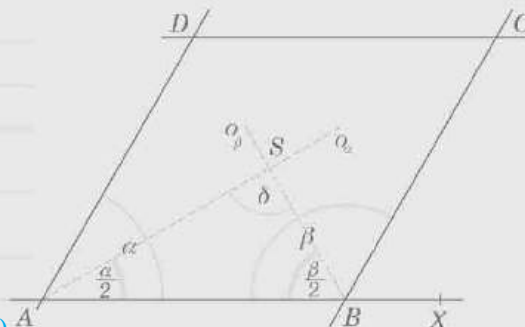
Pre vnútorné uhly $\triangle ABS$ platí:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \delta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 360^\circ - 2\delta$$

Dokonči a vyjadri veľkosť uhla δ : $\frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2}$



Aby sa vám v celej téme lepšie orientovalo, rozdelili sme ju do niekoľkých (tematicky aj matematicky rôznorodých) častí a na záver sme pripravili jednu kapitolu, kde je všetko „krížom-krážom“.

Úloha 1

Vyberte si 4 písmená a píšete všetky slová. Vyhrá ten, kto ich nielen všetky napíše, ale dokáže všetky aj prečítať.

Úloha 2

Iné riešenie: na každé miesto vyberáme z troch možností, to je $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ možností. Takto sme však prípad, že sa opakuje to isté písmeno na všetkých troch pozíciách započítali dvakrát pre každé písmeno – to je spolu 6 možností. Takže konečný počet slov je $27 - 6 = 21$ možností.

Úloha 4

Už pri 13 písmenách je počet slov 6 227 020 800.

7 Metódy riešenia kombinatorických úloh

Riešenie vypísaním (všetkých) možných riešení

- 1** V krajine Fourland majú iba štyri písmená F, O, U, R a každé slovo má práve štyri písmená. V žiadnom slove sa nesmie opakovať ani jedno písmeno. Napíš všetky slová, ktoré sa dajú u nich napísať.

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

- 2** V krajine Triland majú iba tri písmená a každé slovo má práve tri písmená. Na rozdiel od Fourlandu, každé písmeno môže byť v jednom slove použité aj viackrát. Napíš všetky slová krajiny Triland. Je ich viac ako vo Fourlande?

111, 112, 113, 122, 133, 123, 132
222, 221, 223, 211, 233, 213, 231
333, 331, 332, 311, 322, 312, 321

V Trilande je menej slov ako vo Fourlande.



- 3** V krajine Xland majú x písmen a každé slovo má práve x písmen. Na dobrú komunikáciu treba aspoň 2 000 slov. Vypočítaj, aké najmenšie môže byť x, ak sa písmená v slovách:
a) nesmú opakovať, b) môžu opakovať.

a) 5 písmen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 < 2\,000$ b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 3\,105 > 2\,000$
6 písmen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 < 2\,000$ 5-Land
7 písmen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040 > 2\,000$
7-Land



- 4** Predstav si, že by sa z písmen našej abecedy dali vytvárať slová, ktoré by museli obsahovať všetky písmená. (Písmená by sa nesmeli opakovať). Bolo by takýchto slov

- a) viac ako tisíc? písmen našej abecedy je 26
b) viac ako milión? všetkých možných 26-písmenových slov je:
c) viac ako miliarda? $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ viac ako miliarda



- 5** Na dostihoch bežali štyri kone: Majster, Junák, Fairplay a Lysák. Jeden z prítomných odborníkov tipoval poradie: Junák, Majster, Lysák a Fairplay. Druhý bol opatrnejší a tvrdil iba to, že Lysák dobehne skôr ako Majster. Po skončení dostihov sa ukázalo, že prvý odborník neuhádol umiestnenie ani jedného koňa a druhý odborník sa tiež pomyľil. Napíš všetky možnosti, ako mohli kone dobehnúť.

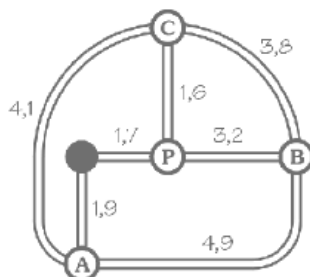
M – J – L – F ✗	F – J – M – L ✓	1. Junák nebol prvý
M – J – F – L ✓	F – J – L – M ✗	Majster nebol druhý
M – L – J – F ✗	F – M – J – L ✗	Lysák nebol tretí
M – L – F – J ✓	F – M – L – J ✗	Fairplay nebol štvrtý
M – F – J – L ✓	F – L – M – J ✗	2. Majster bol pred Lysákom
M – F – L – J ✗	F – L – J – M ✗	

MJFL, MLFJ, MFJL, FJML – tieto štyri možnosti.

- 6** Voľáckedy sa na automobiloch vymieňali pneumatiky navzájom medzi sebou. Napíš všetky rozmiestnenia pneumatík tak, aby sa ľubovoľné dve líšili polohou.

1 2 1 2 1 3 1 3 1 4 1 4	24 možností rozmiestnenia
3 4 4 3 2 4 4 2 2 3 3 2	pneumatík.
2 1 2 1 2 3 2 3 2 4 2 4	
3 4 4 3 1 4 4 1 1 3 3 1	
3 1 3 1 3 2 3 2 3 4 3 4	
2 4 4 2 1 4 4 1 1 2 2 1	
4 1 4 1 4 2 4 2 4 3 4 3	
2 3 3 2 1 3 3 1 1 2 2 1	

- 7** Poštár musí odnieť poštu z pošty P do úradov A, B, C. Môže si vybrať ľubovoľnú trasu. Zisti dĺžky všetkých jeho možných trás, ak každý úrad navštívi iba raz a trasu ukončí na pošte.



PABCP	13,9
PACBP	14,7
PBACP	13,8
PBCAP	14,7
PCABP	13,8
PCBAP	13,9

Úloha 5

Treba si vypísať všetky možnosti a postupne vyradovať tie, v ktorých je Junák prvý, Majster druhý, Lysák tretí, Fairplay štvrtý a Lysák pred Majstrom.

Úloha 10

Prvé miesto (rád stoviek) obsadzujem zo štyroch možných číslíc. Druhé miesto (rád desiatok) z troch možných číslíc (jedna je už na mieste stoviek). Tretie miesto (rád jednotiek) obsadzujem z dvoch možných číslíc (dve už sú určené – jedna na mieste stoviek a jedna na mieste desiatok).

8 Napiš všetky štvorciferné čísla z číslíc 3, 2, 1 a 0, ak sa číslice nesmú opakovať.

0 nesmie byť na prvom mieste, takže čísel bude $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

1 230 2 130 3 120

1 203 2 103 3 102

1 302 2 310 3 201

1 320 2 301 3 210

1 023 2 013 3 012

1 032 2 031 3 021

9 Koľko môžeš vytvoriť päťciferných čísel z číslíc 2, 0, 8, 6 a 4, ak sa číslice nesmú opakovať?

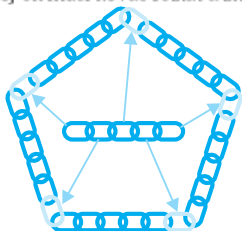
0 nesmie byť na prvom mieste, takže čísel bude $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

10 Koľko môžeš vytvoriť trojciferných čísel z číslíc 1, 3, 5 a 7, ak sa číslice nesmú opakovať? Napiš ich.

□ · □ · □

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ trojciferných čísel.

- 11** Kováč má spojiť šesť reťazí do jednej veľkej uzavretej reťaze. Každá reťaz má 5 ôk. Koľko najmenej ôk musí kováč rozťať a znovu spojiť, aby úlohu splnil?



Ak rozoberie jednu reťaz
a okami z nej pospája ostatné,
tak mu stačí prerezať 5 ôk.

- 12** V triede je 20 žiakov a každý sa priatelí s niekoľkými spolužiakmi. Sú určite v triede dvaja žiaci, ktorí majú rovnaký počet priateľov?

Možné počty priateľov v triede
sú 1, 2, 3, ..., 17, 18, 19.
Keďže detí v triede je 20, určite aspoň
2 musia mať rovnaký počet priateľov.

- 13** Simona, Ivo a Jozef prišli ráno do školy ako prví traja. Jozef neprišiel prvý a Simona neprišla pred Ivanom. V akom poradí mohli prísť?

Jozef nie je prvý
Ivan pred Simonou } Ivan prvý

1. možnosť: ISJ
2. možnosť: IJS

- 14** Mamička chce upiecť tri koláče. Na prípravu prvého koláča potrebuje 40 minút a jeho pečenie v rúre trvá 25 minút. Druhý koláč pripraví za 20 minút a upeče sa za 35 minút. Tretí koláč pripraví za 50 minút a upeče sa za 30 minút. V akom poradí má koláče pripravovať a piecť, aby jej to zabralo čo najmenej času?



$$1 \ 2 \ 3 \ 40 + \overset{20}{25} + \overset{35}{35} + 15 + 30 = 145 \text{ min} \quad 1. \text{ koláč} \quad 40 + 25$$

$$1 \ 3 \ 2 \ 40 + \overset{25}{25} + \overset{20}{25} + 30 + 35 = 155 \text{ min} \quad 2. \text{ koláč} \quad 20 + 35$$

$$2 \ 3 \ 1 \ 20 + \overset{35}{35} + \overset{15}{15} + \overset{30}{30} + 10 + 25 = 135 \text{ min} \quad 3. \text{ koláč} \quad 50 + 30$$

$$2 \ 1 \ 3 \ 20 + \overset{35}{35} + 5 + \overset{25}{25} + 25 + 30 = 140 \text{ min}$$

$$3 \ 1 \ 2 \ 50 + \overset{30}{30} + 10 + \overset{20}{25} + 35 = 150 \text{ min}$$

$$3 \ 2 \ 1 \ 50 + 30 + \overset{20}{35} + 5 + 25 = 145 \text{ min}$$

Má ich pripravovať v poradí 2., 3., 1.

Úloha 12

Uvažujme, že žiadna dvojica nemá rovnaký počet priateľov. Potom sú možné počty priateľov pre jednotlivých žiakov v triede: 2, 3, 4, 5, ..., 18. Lenže žiakov je 20. Osemnásť počtov priateľstiev sa nedá jednoznačne priradiť 20 žiakom. Z toho vyplýva, že aspoň dvaja majú rovnaký počet priateľov.

Úloha 14

Podstatné je uvedomiť si, že čas, kedy je predchádzajúci koláč v rúre a pečie sa, je možné využiť na prípravu nasledujúceho koláča. Mama síce nebude mať čas na kávu, ale bude rýchlejšie hotová :).

Úloha 1

V prvom type riešenia vypisujeme počet ciest, ktorými sa môžeme dostať do daného bodu. V druhom type riešenia sme si všetky cesty pomocou stromu aj vypísali. V ďalších úlohách (pretože nepotrebujeme poznať všetky cesty) použijeme riešenie prvého typu.

Úloha 2

a) Všimni si vaši žiaci, že počet ciest do bodu X získame ako súčet počtu ciest z bodov, ktoré sú nad bodom X a vpravo od neho?

b) Nesmieme vyfarbiť štvorce vľavo hore alebo vpravo dole, pretože sa potom nedostaneme ani k bodu A ani k bodu B.

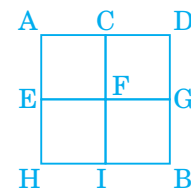
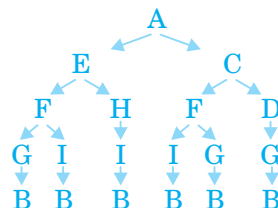
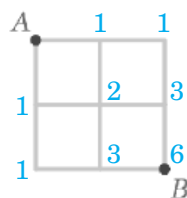
Ak vyfarbíme štvorce vľavo dole alebo vpravo hore, budú vždy existovať 3 možné cesty z bodu A do bodu B.

Úloha 3

Vymýšľajte podobné úlohy. Aj vy, aj vaši žiaci. V prípade žiakov je, samozrejme podmienkou, aby pri zadaní vlastnej úlohy ostatným vedeli aj jej riešenie.

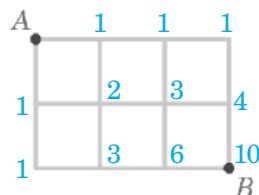
Riešenie grafickým znázornením

- 1** Chceš sa dostať z bodu A do bodu B. Môžeš ísť iba po stranách štvorcov doprava alebo nadol. Nakresli všetky rôzne cesty z A do B. Koľko ich je?

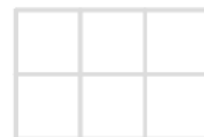
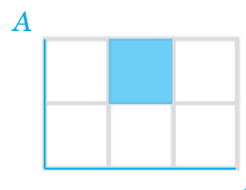
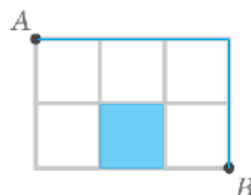


6 možných ciest

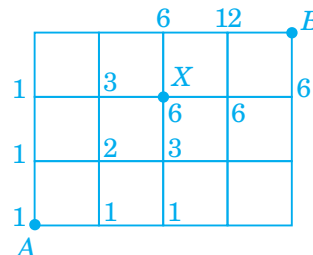
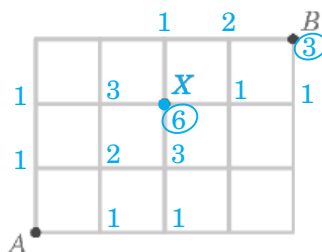
- 2** a) Rieš úlohu 1 na nasledujúcom obrázku.



- b) Vyfarbi jeden štvorec tak, aby existovala jediná cesta z A do B, ktorá nebude prechádzať po stranách ani cez vrcholy tohto štvorca.



- 3** Koľko ciest je z A do B, ktoré prechádzajú bodom X (môžeš ísť iba nahor alebo doprava)?



$$6 \cdot 3 = 18 \text{ ciest}$$

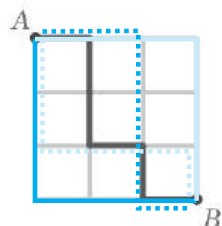
Úloha 5

Riešenie je správne iba za predpokladu, že sa posúvame iba smerom doprava a nadol.

Úloha 6

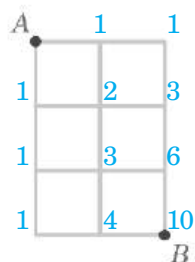
Už v úlohe 4 ako by sme hľadali 6-písmenkové slová zložené z písmen *p* a *d*. Skúste počet ciest (písmen) „natahovať“ a vymýšľať ďalšie úlohy.

- 4** Na obrázku je nakreslená jedna cesta z A do B. V tabuľke je táto cesta symbolicky zapísaná. Písmeno p znamená doprava, písmeno d znamená nadol. Nakresli do obrázka ešte aspoň 5 ciest z A do B a zapíš ich rovnakým spôsobom.



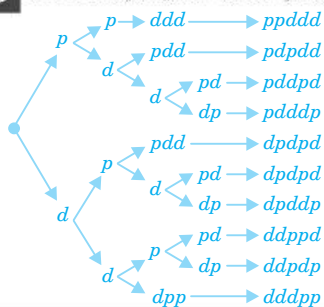
1	p	d	d	p	d	p	6	d	d	p	p	p	d
2	p	p	p	d	d	d							
3	d	d	d	p	p	p							
4	p	p	d	d	d	p							
5	p	d	d	d	p	p							

- 5** Koľko ciest existuje z A do B na nasledujúcom obrázku?



Existuje 10 ciest.

- 6** Koľko rôznych „slov“ sa dá vytvoriť z troch písmen *d* a dvoch písmen *p*. (napr.: *ddpdp*)?

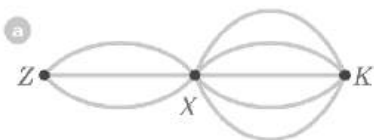
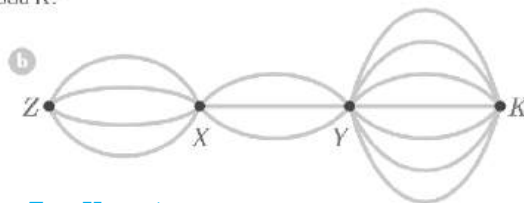


Pri cestách je možnosť ísť
3-krát dole (písmeno *d*)
a 2-krát vpravo (písmeno *p*)
a rôzne to kombinovať.



Vytvoriť sa dá 10 slov.

- 7** Koľkými spôsobmi sa vieš dostať z bodu Z do bodu K?


$$Z \rightarrow X \dots 3$$
$$X \rightarrow K \dots 5$$
$$Z \rightarrow K \dots 3 \cdot 5 = 15 \text{ ciest}$$

$$Z \rightarrow X \dots 4$$
$$X \rightarrow Y \dots 3$$
$$Y \rightarrow K \dots 7$$
$$Z \rightarrow K \dots 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ ciest}$$

Úloha 1

Ponúkli sme vašim žiakom štyri spôsoby, ako vyriešiť takúto úlohu. Myslíme si, že v triede sa objavujú aj iné spôsoby. Ukážte si ich a skúste spolu so žiakmi otestovať, či sú univerzálne – teda či budú fungovať aj na iné úlohy ako túto. Naším cieľom nie je, aby každý žiak ovládal všetky spôsoby riešenia, ale aby si každý dokázal vybrať ten, ktorý je najbližší jeho spôsobu uvažovania, nazerania na problémy a jeho predstavivosti.

Riešenie pomocou tabuľky

- 1** Na majstrovstvách sveta v hokeji sú družstvá rozdelené do dvoch skupín po 6 (A, B, C, D, E, F). V každej skupine hrá každý s každým práve raz. Koľko zápasov sa hrá v jednej skupine? Koľko v oboch?

a Dokonči toto riešenie:

A – B B – C C – D D – E E – F

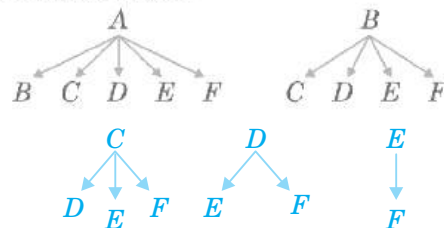
A – C B – D C – E D – F

A – D B – E C – F

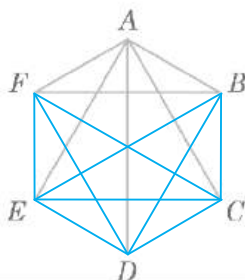
A – E B – F

A – F

b Dokonči toto riešenie:



c Dokonči toto riešenie:



d Dokonči toto riešenie:

	A	B	C	D	E	F
A	—	●	●	●	●	●
B		—	●	●	●	●
C			—	●	●	●
D				—	●	●
E					—	●
F						—

V jednej skupine sa hrá spolu 15 zápasov. V oboch skupinách je to spolu 30 zápasov.

e Pokús sa vymyslieť ešte iné riešenie.



- 2** Bertram vymyslel vlastné riešenie úlohy 1: „V skupine je 6 družstiev a každé hrá s 5 súpermi. Spolu je to $6 \cdot 5 = 30$ zápasov.“ Čo si myslíš o tomto riešení?

Riešenie nie je správne. Bertram započítal zápasy A s B, B s A ako dva rôzne. Bertram musí výsledok deliť dvomi.

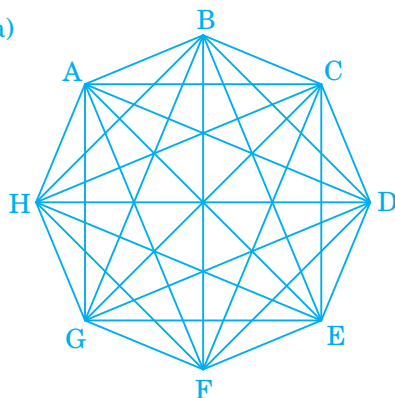
- 3** Osem dievčat zo 7. A hralo pingpongový turnaj tak, že každé dievča si zahralo s každým.

a) Koľko odohrali zápasov?

b) O koľko zápasov viac by sa hralo, keby pribudlo ešte jedno dievča?

Úlohu vyrieš všetkými spôsobmi podľa úlohy 1.

a)



b) $x \rightarrow 8$

A $\rightarrow 7$

B $\rightarrow 6$

C $\rightarrow 5$

D $\rightarrow 4$

E $\rightarrow 3$

F $\rightarrow 2$

G $\rightarrow 1$

28 spolu

A – B B – C C – D D – E E – F

A – C B – D C – E D – F E – G

A – D B – E C – F D – G E – H

A – E B – F C – G D – H

A – F B – G C – H F – G

A – G B – H F – H

A – H

G – H

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	–	1	2	3	4	5	6	7
B		–	8	9	10	11	12	13
C			–	14	15	16	17	18
D				–	19	20	21	22
E					–	23	24	25
F						–	26	27
G							–	28
H								–



a) Dievčatá odohrali 28 zápasov.

b) Ak pribudne 1 dievča, pribudne 8 zápasov.

Úloha 3

Kým pri počte 5 sú ešte všetky nami ukázané postupy dostatočne názorné, už pri počte 7 niektoré strácajú zmysel. S narastajúcim počtom treba naučiť žiakov zovšeobecniť, nájsť logiku v počte pribúdajúcich možností. Tak ako sme to naznačili v otázke b).

Úloha 4

Z piatich dievčat sa mi ľahšie tvoria (a vypisujú) dvojice ako trojice. Ak vytvorím dvojicu, súčasne vytvorím aj trojicu. Preto platí – koľko dvojíc vytvorím z piatich dievčat, toľko z nich vytvorím aj trojíc.

Úloha 5 b)

Iné riešenie je vypočítať, že päť dievčat zo 7.A by proti sebe zohralo 10 zápasov, päť dievčat zo 7.B by proti sebe zohralo tiež 10 zápasov, takže zostáva $45 - 2 \cdot 10 = 25$ zápasov.

4 Z piatich dievčat postupujú tri do ročníkového turnaja. Koľko rôznych trojíc môže postúpiť?

$AB \rightarrow CDE$ $BC \rightarrow ADE$ $CD \rightarrow ABE$ $DE \rightarrow ABC$
 $AC \rightarrow BDE$ $BD \rightarrow ACE$ $CE \rightarrow ABD$
 $AD \rightarrow BCE$ $BE \rightarrow ACD$
 $AE \rightarrow BCD$

Môže postúpiť 10 trojíc.

5 V ročníkovom turnaji siedmačiek sa stretne 5 áčkariek a 5 béčkariek.

a) Koľko odohrajú zápasov, ak bude hrať každá s každou?

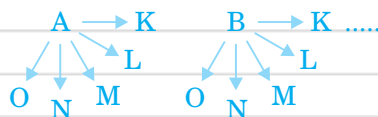
10 dievčat, každá s každou: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$

Odohrávajú 45 zápasov.

b) Aby turnaj netrval príliš dlho, dievčatá sa dohodli, že nebudú hrať zápasy, v ktorých by proti sebe hrali dievčatá z tej istej triedy. Koľko bude potom zápasov v turnaji?

7.A A, B, C, D, E (každá 5 zápasov)

7.B K, L, M, N, O



V turnaji bude 25 zápasov.

6 Na prvých štyroch miestach v turnaji skončili po veľkom boji tieto siedmačky: Andrea, Linda, Daniela a Peťa. Napíš všetky možné poradia, v akých sa dievčatá mohli umiestniť.

Andrea na 1. mieste

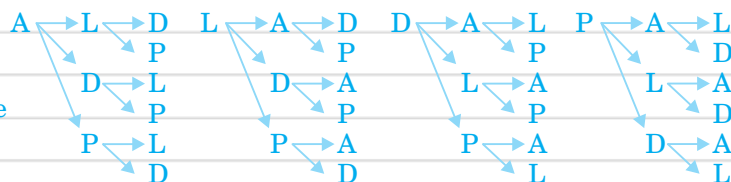
rovnako aj keď

bude na 1. mieste

Linda, Daniela

alebo Peťa.

Spolu 24 možností.



Pravidlo súčtu a súčinu

1 Danko si pletie sveter a má na výber vlny siedmich farieb.

a Koľkými spôsobmi môže vybrať tri farby na rukávy?



b Na chrbáte chce mať pásiky zo štyroch farieb. Koľko možností má na výber?

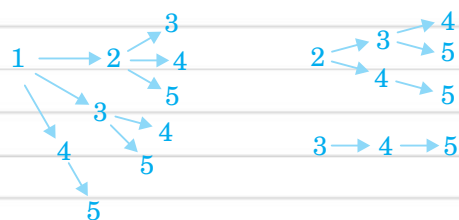
Každá trojica určuje
práve jednu štvoricu.

35 možností



2 Janka si pletie páskové rukavice a má iba 5 farieb.

a Koľko má možností, ak chce mať ľavú rukavicu trojfarebnú?



b Koľko rôznych pravých rukavíc Janka uplete, ak na pravú rukavicu použije vždy všetky farby, ktoré nepoužila na ľavú rukavicu?

L = 123 → P = 45
L = 124 → P = 35
...
L = 345 → P = 12

10 možností → 10 možností

Úloha 1

Ak by záležalo na poradí farieb, je počet možností $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ (zadanie **a**)) a na chrbte $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ (zadanie **b**)).



Úloha 3

Úloha 4

Z n detí sa dá vytvoriť
 $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$ dvojíc.
 Je to ako by chceli hrať turnaj
 systémom každý s každým.

Alebo aj $n \cdot \frac{n+1}{2}$.

Tento vzorec si viete so žiakmi
 jednoducho a rýchlo odvodiť.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & & \\ (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & & \\ \hline n & + & n & + & \dots & + & n & + & n & & \dots \end{array}$$

... to je $(n - 1) \cdot n$.

Lenže každé číslo je započítané
 dvakrát (raz v prvom riadku a raz
 v druhom riadku), preto delené
 dvomi.

Úloha 5

Ak je v triede n detí a 1 pribudne,
 tak pribudne n dvojíc týžden-
 níkov (z každým z n detí môže
 utvoriť jednu dvojicu).

Ak je v triede n detí a 1 dieťa
 ubudne, tak ubudne $(n - 1)$ dvojíc
 týždenníkov (toto jedno dieťa
 tvorilo z ostatnými z triedy
 $n - 1$ dvojíc).

3 Vypočítaj, koľko chlapčenských dvojíc týždenníkov sa dá vytvoriť vo vašej triede.

4 Vypočítaj, koľko dievčenských dvojíc týždenníkov sa dá vytvoriť vo vašej triede.

5 Vypočítaj, koľko ľubovoľných dvojíc týždenníkov sa dá vytvoriť vo vašej triede.
 Potom vypočítaj, koľko dvojíc by pribudlo, keby vás bolo o jedného/jednu viac,
 a koľko dvojíc by ubudlo, keby vás bolo o jedného/jednu menej.



6 Pani učiteľka si vypočítala, že v triede, v ktorej je 22 detí, sa dá vybrať 231 rôznych dvojíc týždenníkov. Miško 1. apríla navrhol, aby v triede bolo vždy naraz 20 týždenníkov. Koľko rôznych dvadsať týždenníkov sa dá v tejto triede vybrať?



Každá dvojica týždenníkov určí jednu dvadsaticu zostávajúcich žiakov.

Dvadsať žiakov bude toľko isto ako dvojíc – 231.

- 7** Koľko rôznych hudobných skupín môže vzniknúť, ak si každý hudobník na obrázku môže vybrať hociaký nástroj z obrázka?



3 hudobníci – 4 hudobné nástroje

1. hudobník 4 možnosti
2. hudobník 3 možnosti
3. hudobník 2 možnosti } $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ hudobných skupín

- 8** V hoteli Eden označujú čísla izieb trojčíferným číslom a jedným z písmen A, B. Prvá číslica určuje číslo poschodia. Koľko najviac izieb môžu mať v hoteli?

1. číslica 9 možností
2. číslica 9 možností (aj 0)
3. číslica 8 možností } $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$
2 písmená $648 \cdot 2 = 1\,296$

V hoteli môžu mať 1 296 izieb.

Na prízemí
nie sú izby.



- 9** Čoho je najviac a čoho najmenej?

a) Trojčíferná čísla s rôznymi ciframi, ak môžeme použiť všetky cifry. 0 nemôže byť prvá.

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

b) Trojfarebné stužky, ak máme desať farieb, pričom ČMZ je iná stužka ako ZMČ.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

c) Trojčlenné skupiny z desiatich detí.

$$120$$

Najviac je stužiek, najmenej trojíc žiakov

- 10** Kráľ má štyri princezné a každý deň musia dve z nich umývať riad. Koľko najviac dní im bude trvať, kým sa žiadna dvojica pri umývaní riadu nezopakuje?



1.									
2.									
3.									
4.									

6 dní

- 11** Vyrieš úlohu 4 aj v prípade, že by denne museli umývať riad tri princezné.

1.									
2.									
3.									
4.									

4 dni

Úloha 8

Na miesto prvej číslice nemôžem dať nulu (na prízemí nie sú izby), preto iba 9 možností.

Úloha 9c)

Ako vypočítať počet trojíc z desiatich detí, keď žiaci nepoznajú „kombinatorické vzorce“?

Podme nájsť systém. Očíslujme si deti číslami 1, 2, 3, ..., 10.

Ak vyberieme 1 a k nemu 2, ešte máme 8 možností, ako pridať žiaka do tretice (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Ak vyberieme 1 a k nemu 3, ešte máme 7 možností, ako vybrať žiaka do trojice (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 – možnosť 123 je už zahrnutá v predchádzajúcom)...

Ak vyberieme 1 a k nemu postupne pridávame 2 (a doplníme do trojice), 3 (a doplníme do trojice), 4 (a doplníme do trojice), 5 (a doplníme do trojice), ..., máme $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ možností.

Ak vyberieme 2 a k nemu 3, ešte máme 7 možností, ako pridať žiaka do tretice (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Ak vyberieme 2 a k nemu 4, ešte máme 6 možností, ako pridať žiaka do tretice (5, 6, 7, 8, 9, 10)...

Ak vyberieme 2 a k nemu postupne pridávame 3 (a doplníme do trojice), 4 (a doplníme do trojice), 5 (a doplníme do trojice), ..., máme $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ možností.

Ak vyberieme 3 a k nemu postupne pridávame 4 (a doplníme do trojice), 5 (a doplníme do trojice), 6 (a doplníme do trojice), ..., máme $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ možností...

(pokračovanie na s. 74)

Možností je spolu:

$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
 $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
 $5 + 4 + 3 + 2 + 1$
 $4 + 3 + 2 + 1$
 $3 + 2 + 1$
 $2 + 1$
 1

V tomto súčte je $8 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 120$ všetkých možností, ako utvoriť žiacu z 10 žiakov.

Úloha 2

Trpezlivosť výsledky prináša. Najväčším problémom pre žiakov bude nájsť si systém vo vypisovaní všetkých možností, aby ani na jednu z nich nezabudli. Potom už stačí všimnúť si cestu smerujúcu vľavo (tak ako my, pretože sme mali maslovú stranu vždy vľavo pri vypisovaní možností), alebo vpravo.

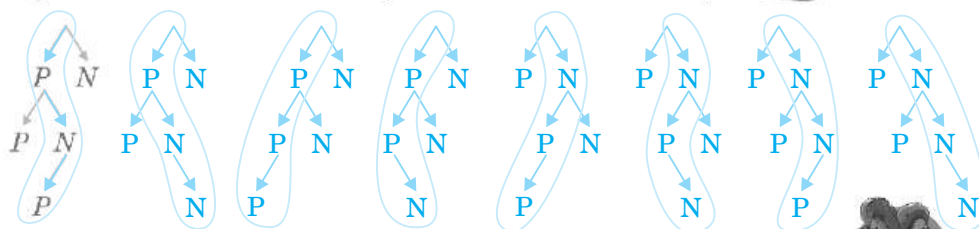
Úloha 3

Iná možnosť, ako riešiť podobné úlohy, je pomocou tabuľky všetkých možných situácií (tak ako sme to urobili my).

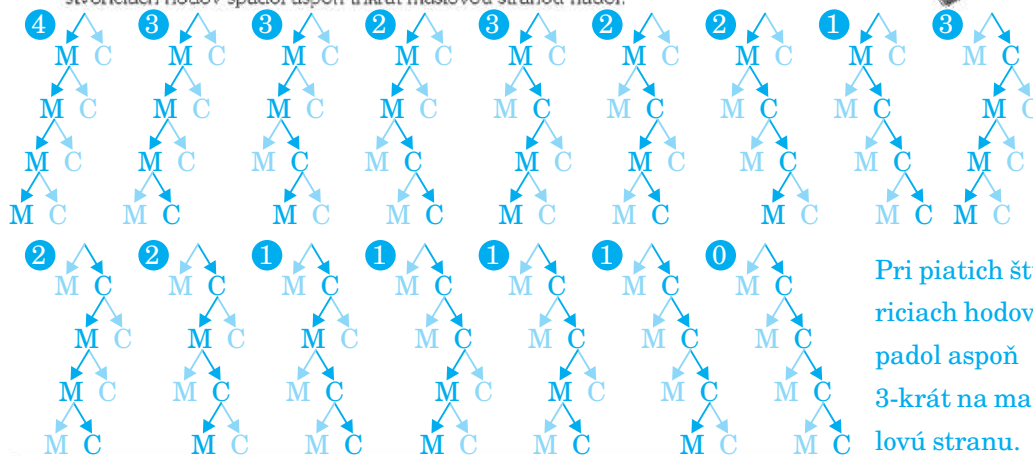
Diskutujte so žiakmi o tom, ktorý spôsob je pre nich zrozumiteľnejší a prehľadnejší.

Stromy možností

- 1** Hádzame trikrát hracou kockou a všimame si, či padlo párne, alebo nepárne číslo. Výsledky môžeme zakresliť do stromu logických možností, ako je na obrázku. Najdlhšia nakreslená cesta v tomto strome je PNP. Dokresli ostatné možné cesty.



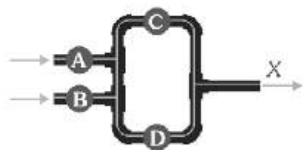
- 2** Hádzame maslovým chlebom a všimame si, ktorou stranou spadol na zem. Nakresli strom logických možností pre štyri hody a zisti, pri koľkých štvoricach hodov spadol aspoň trikrát maslovou stranou nadol.



Pri piatich štvoricach hodov padol aspoň 3-krát na maslovú stranu.

- 3** Na obrázku je schéma vodovodnej siete s ventilmi v bodoch A, B, C, D. Voda tečie v smere šípok.

a Zostav strom všetkých možností podľa stavu ventilov – otvorený, zatvorený.



A	o	o	o	o	o	o	o	o	z	z	z	z	z	z	z	z
B	o	o	o	o	z	z	z	z	o	o	o	o	z	z	z	z
C	o	o	z	z	o	o	z	z	o	o	z	z	o	o	z	z
D	o	z	o	z	o	z	o	z	o	z	o	z	o	z	o	z



- b Pri koľkých možnostiach voda vyteká v mieste X?

9 možností

4 Koľko rôznych štvorciferných čísel môžeš vytvoriť len pomocou čísla 8 a 9?

1-krát 8, 3-krát 9: 8999, 9899, 9989, 9998

2-krát 8, 2-krát 9: 8899, 8989, 8998, 9988, 9898, 9889

3-krát 8, 1-krát 9: 8889, 8898, 8988, 9888

4-krát 8: 8888

4-krát 9: 9999

5 Koľko je trojčiferných čísel, ktorých ciferný súčet je 7?

$7 = 0 + 0 + 7 \rightarrow 700$

$7 = 1 + 2 + 4 \rightarrow 124, 142, 214, 241, 412, 421$

$7 = 0 + 1 + 6 \rightarrow 610, 601, 160, 106$

$7 = 1 + 3 + 3 \rightarrow 133, 313, 331$

$7 = 0 + 2 + 5 \rightarrow 520, 502, 250, 205$

$7 = 2 + 3 + 2 \rightarrow 322, 232, 223$

$7 = 0 + 3 + 4 \rightarrow 430, 403, 340, 304$

$7 = 1 + 1 + 5 \rightarrow 115, 151, 511$

28 trojčiferných čísel

6 Koľko je čísel menších ako 222, ktorých ciferný súčet je 8?

1-ciferné: 8

$8 = 0 + 0 + 8$

$8 = 1 + 1 + 6$

2-ciferné: 80, 71, 17, 62, 26, 53, 35, 44

$8 = 0 + 1 + 7$

$8 = 1 + 2 + 5$

3-ciferné: 170, 107, 206, 116, 161,

$8 = 0 + 2 + 6$

$8 = 1 + 3 + 4$

125, 152, 215, 134, 143

$8 = 0 + 3 + 5$

$8 = 2 + 2 + 4$

19 čísel

$8 = 0 + 4 + 4$

$8 = 2 + 3 + 3$

7 Koľko je štvorciferných čísel deliteľných piatimi?

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2 = 1\,296$ čísel

Kedy je
číslo deliteľné
piatimi?



8 Koľko je trojčiferných čísel, ktoré sa nezmenia, ani keď ich čítame odzadu? (Např. 131.)

101, 111, 121, 131, ... 191 $\rightarrow 10$

202, 212, 222, 232, ... 292 $\rightarrow 10$

...

909, 919, 929, 939, ... 999 $\rightarrow 10$

$9 \cdot 10 = 90$ čísel

Úloha 4

Táto úloha sa ľahko vypočíta a ľahko sa aj vypíše všetky možné čísla. Urobte jedno aj druhé.

Úloha 5

Prvý krok – zistiť, ktoré tri cifry dajú súčet 7.

Druhý krok – z daných trojíc „vyrobiť“ všetky možné trojčiferné čísla.

Úloha 6

Nezabudnite, že nás zaujímajú aj jednociferné aj dvojčiferné čísla. Podmienka „menší ako 222“ počet kandidátov značne zmenší.

Úloha 7

Na miesto tisícok môžeme vybrať z 9 číslic (nulu nie), na miesto stoviek tiež z deviatich číslic (nulu plus jednu z ôsmich, ktoré sme nedali na miesto tisícok). Na miesto desiatok môžeme vybrať z ôsmich číslic. Na miesto jednotiek z dvoch (nulu alebo päťku, aby bol výsledok deliteľný piatimi).

Dirichletov princíp je pomenovanie jednoduchého tvrdenia z kategórie „zdravý sedliacky rozum“. Jeho podstatou je, že ak umiestnime do niekoľkých priehradiek viac predmetov, ako je priehradiek, potom sú aspoň v jednej priehradke najmenej dva predmety.

Úloha 1

- a) Na jednom okne môže byť 0, 1 alebo 2 vločky (menej ako 3). Teda najviac sa nám podarí nalepiť $4 \cdot 2 = 8$ vločiek.
- b) Na jednom okne môže byť 0, 1, 2 alebo 3 vločky (menej ako 4). $4 \cdot 3 = 12$, čo je viac ako 10, takže vieme splniť zadanie úlohy.

Úloha 4

- a) Ak by sa narodili po dvaja v jednom mesiaci, „minuli“ by sme 24 žiakov. Ešte nám ostane $31 - 24 = 7$ žiakov, ktorí sa narodili v niektorom mesiaci. Takže nájdeme aspoň jeden mesiac, kedy sa narodili traja žiaci.
- b) Stačí nájsť mesiac, kedy tvrdenie neplatí (napríklad január).

Dirichletov princíp

1 Žofka robí vianočnú výzdobu a chce na okná nalepiť 10 snehových vločiek. V byte má štyri okná.

- a) Môžu byť na každom okne menej ako 3 vločky? b) Môžu byť na každom okne menej ako 4 vločky?



$$4 \cdot 2 = 8; 8 < 10$$

Nemôže.

$$4 \cdot 3 = 12; 12 > 10$$

Môže.

2 Jakub píše na papier dvojčíferné čísla v ľubovoľnom poradí, ako mu napadnú. Keď ich napísal 76, Dominik tvrdil, že určite už musí mať napísané dve rovnaké. Prečo Dominik nemal pravdu? Koľko ich musí Jakub napísať, aby mal Dominik pravdu?

2-ciferné čísla 10, 11, 12, ... 98, 99 90 čísel

$76 < 90$ mohol napísať 76 rôznych

$91 > 90$ ak napíše 91 čísel, už sa mu musí aspoň 1 zopakovať

3 V 7.A triede je 27 žiakov. Ktorý zo žiakov má pravdu?

☒ áno ☒ nie

- a) ☒ Jožko: „Hoci nepoznám dátumy narodenia, určite sa aspoň dvaja narodili v tom istom mesiaci.“

mesiacov 12, žiakov 27 $12 < 27$

- b) ☒ Katka: „Hoci nepoznám dátumy narodenia, určite sa aspoň dvaja narodili v ten istý deň mesiaca.“

dní v mesiaci 28, 29, 30, 31, žiakov 27 $27 < 28 < 29 < 30 < 31$

4 V 7.B triede je 31 žiakov. Sú pravdivé Barborkine tvrdenia?

☒ áno ☒ nie

- a) ☒ Hoci nepoznám dátumy narodenia, určite sa aspoň traja narodili v tom istom mesiaci.

mesiacov 12, po dvaja 24 žiakov $31 > 24$

- b) ☒ Hoci nepoznám dátumy narodenia, určite sa aspoň dvaja narodili v ten istý deň mesiaca.

napríklad január 31 dní, 31 žiakov $31 = 31$

- c) ☒ Hoci nepoznám dátumy narodenia, určite sa aspoň piati narodili v ten istý deň týždňa.

dní 7, po štyroch 28 žiakov $28 < 31$

Krížom-krážom kombinatorikou

- 1** Otec mal mince a bankovky v hodnote 1 €, 2 € a 5 €. Zaplatil nimi 17 €. Koľko ktorých mincí použil, ak vieš, že použil mince všetkých hodnôt?

$$\square \cdot 1\text{€} + \square \cdot 2\text{€} + \square \cdot 5\text{€} = 17\text{€}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5$$

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5$$

- 2** Števo ležal v posteli s chrípkou a sledoval digitálny budík, ktorý ukazoval hodiny, minúty a sekundy.

- a** Kolkokrát za 24 hodín sú na budíku všetky číslice rovnaké?

- b** Kolkokrát za 24 hodín sa súčasne menia všetky číslice?

00 : 00 : 00

09 : 59 : 59

11 : 11 : 11

19 : 59 : 59

22 : 22 : 22 3-krát



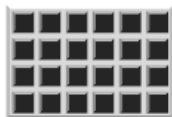
23 : 59 : 59 3-krát

- 3** Na stavebnom pozemku sú tri domy a tri stromy. Majiteľ každého domu chce mať cestu ku každému stromu, ale tak, aby sa cesty nekrižovali. Ako to majú urobiť?

D D D Nedá sa to.

S S S

- 4** Vezmi si čokoládu 4×6 a láť ju iba po naznačených líniách. Na aký najmenší počet prelomí ju vieš rozlámať na samostatné štvorčeky?



$$3 + 3 \cdot 5 = 18$$

$$5 + 3 \cdot 6 = 23$$



- 5** Pani učiteľka vyberala na súťaž trojčlenné družstvo, v ktorom musel byť aspoň jeden chlapec aj dievča. Dievčatá vyberala z Beťky, Katky a Zuzky, chlapcov z Andreja, Ivana a Olega. Napíš všetky možnosti.

1 Ch + 2 D

$$3 \cdot 3 = 9$$

1 D + 2 Ch

$$3 \cdot 3 = 9$$

3 možnosti

3 možnosti

3 možnosti

3 možnosti

18 možností

Úloha 1

Rovnicu môžete zapísať aj pomocou neznámych – ako vhodnú propedeutiku pre zoznámenie sa s neznámou a rovnicami. Vždy ju ale interpretujte spôsobom „hľadáme čísla, ktoré keď vymeníme za neznámu (napíšeme do štvorčka), dostaneme rovnosť“.

Úloha 5

ABZ, ABY, AKZ, IBK, IBZ, IKZ, OBK, OBZ, OKZ, BAI, BIO, BAO, KAI, KIO, KAO, ZAI, ZIO, ZAO.



Úloha 6 Úloha 7 Úloha 8

Cieľom týchto úloh je, aby sa žiaci naučili vytvoriť si systém pri vypisovaní všetkých možností. Na záver môžete zistiť, koľko systémov sa v triede objavilo a hlasovaním zvoliť najefektívnejší, najkrajší, najkomplikovanejší...

Úloha 9

Táto kombinácia dáva 70 možností rôznych čiarových kódov. Čiarový kód je strojom čitateľné označovanie tovarov pomocou hrubých a tenkých čiar oddelených medzerami. Existuje veľa rôznych druhov čiarových kódov, najpoužívanejší je kód EAN. Väčšina čiarových kódov kóduje iba číslice, ale moderné čiarové kódy môžu kódovať všetky znaky ASCII.

Na tlač čiarových kódov sa používajú špeciálne tlačiarne, ale možno ich tlačiť aj na bežných tlačiarnach schopných pracovať v grafickom móde. Na snímanie sa používajú snímače, ktoré sú založené buď na technológii CCD alebo snímajú pomocou lasera.

Čiarové kódy spadajú do oblasti tzv. „automatickej identifikácie“ alebo inak povedané do oblasti „registrácie dát bez použitia kláves“. Množstvo zakódovanej informácie na jednotku dĺžky určuje hustota a druh kódu. Pre kódovanie menšieho počtu znakov sa používajú lineárne kódy, väčší objem informácií sa kóduje do dvojrozmerných kódov.

(podľa www.sk.wikipedia.org)

- 6** Na označovanie výrobkov v dielni používajú zjednodušený čiarový kód skladajúci sa z troch hrubých čiarok a dvoch tenkých čiarok. Majú práve toľko výrobkov, koľko dokážu vytvoriť čiarových kódov. Koľko výrobkov majú v dielni?

H H H T T	H T T H H	
H H T H T	T H H H T	
H H T T H	T H H T H	
H T H H T	T H T H H	
H T H T H	T T H H H	10 výrobkov

- 7** Po rozšírení výroby sa rozhodli pridať ešte dve čiarky – jednu hrubú a jednu tenkú. Koľko rôznych kódov môžu mať teraz?

35 možností.

- 8** Ako by sa zmenil počet kódov v úlohe 7, keby jednu tenkú čiarku nahradili hrubou?

O 14 menej, 21 možností.

- 9** V dielni chcú vyrábať 40 výrobkov. Vymysli čo najkratší kód z hrubých a tenkých čiarok pre tieto výrobky – urč celkový počet čiarok, počet hrubých čiarok a počet tenkých čiarok.

Napríklad 4 hrubé a 3 tenké čiarky.

Kombinatorika v prírode

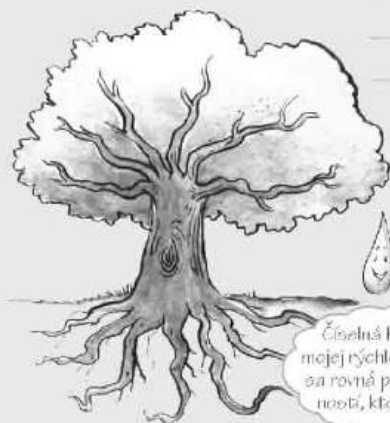
PROJEKT

Korene figovníkov vŕaj dorastajú až do hĺbky 120 metrov!

Počet metrov je rovnaký ako počet možností, ktoré má záhradník, ak chce vedľa seba zasadiť 5 rôznych figovníkov.



$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$



Číselná hodnota
mojej rýchlosti v dube
sa rovná počtu mož-
ností, ktoré mám.

Voda v stromoch prúdi zo zeme do konárov
v niektorých stromoch celkom pomaly, napr. v buku
je to asi 1 meter za hodinu. Ale napr. v dube prúdi
prekvapujúco rýchlo – až 42 metrov za hodinu.

Kvapka vody sa chce zo zeme dostať na koniec niektorého
konára stromu. Koľko má ciest, ktoré si môže vybrať?

7 košov

$$7 \cdot 6 = 42$$

6 košov

Rovnako, ako píštolníci patria k filmom z divokého západu aj obrovské
kaktusy. Rastlina, ktorá často pripomína veľký svietnik a s obľubou rastie
na púšťach Arizony a Mexika, sa volá kaktusovec obrovský. To, že
si svoje meno naozaj zaslúži, potvrdzuje jeho výška. Dorastá až do m.
Koľkými cestami môže kvapka sťať k vyznačenému písmenu U?

15-timi cestami



Počet mož-
ností, ktoré mám,
sa rovná hĺbda-
nej výške.

Najväčšie semená na svete má palma s názvom
lodocea seychellarum. Merajú v priemere až 30 cm a vážia až 9 kg.

Výfarbi piatimi farbami čo najviac čerešníček dvojčiek tak, aby žiadne dvojčičky
neboli rovnaké a v dvojčičke bola vždy každá čerešníčka iná. Koľko máš dvojíc?
Toľko váži semeno palmy.

